1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q, R) \in E^3$, alors $\langle \lambda P + \mu Q, R \rangle = \int_{-1}^{1} (\lambda P + \mu Q)(t)\, R(t)\, \mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)\, R(t)\, \mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} Q(t)\, R(t) = \lambda \langle P, R \rangle + \mu \langle Q, R \rangle$ ce qui montre la linéarité à gauche de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On établit de même sa linéarité à droite.

   La symétrie est immédiate puis, étant donné $P \in E$, $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P^2(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 0$. Si de plus $\langle P, P \rangle = 0$ alors, comme $t \mapsto P^2(t)$ est continue sur $[-1, 1]$, à valeurs positives et y est d'intégrale nulle, alors $\forall t \in [-1, 1], P^2(t) = 0$ ce qui montre que le polynôme P admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

   Ceci achève de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique, définie positive, et est donc un produit scalaire sur E.

2. a. On reconnaît que F est l'ensemble des polynômes pairs de E, autrement dit $F = \mathrm{Vect}(1, X^2, \cdots, X^{2n})$ et bien sûr alors F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $n+1$. De même, $G = \mathrm{Vect}(X, X^3, \cdots, X^{2n-1})$ est l'ensemble des polynômes impairs de E, et il forme un sous-espace vectoriel de E de dimension n. $(1, X^2, \cdots, X^{2n})$ et $(X, X^3, \cdots, X^{2n-1})$ sont des bases respectives de F et de G dont la réunion forme une base de E (à l'ordre des termes près, la base canonique de E) et donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

   Soit $(P, Q) \in F \times G$, alors $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} \int_{1}^{-1} P(-u)\, Q(-u)\, (-\mathrm{d}u) = \int_{-1}^{1} -P(u)\, Q(u)\, \mathrm{d}u = -\langle P, Q \rangle$ ce qui montre que $\langle P, Q \rangle = 0$ et prouve que $F \perp G$. F et G sont donc bien deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de E.

   b. Même si l'énoncé indique que Δ est supposée être une application de E dans E, il est judicieux de s'en assurer rapidement : soit $P \in E$, alors $d(P) \leqslant 2n$, puis $d((X^2 - 1)\, P'') \leqslant 2 + 2n - 2$ et $d(2\, X\, P') \leqslant 1 + 2n - 1$ et donc $\Delta(P)$ est bien un polynôme (cela ne fait aucun doute) de degré au plus $2n$ (ce qu'on vient de voir). En fait, en reprenant les calculs ci-dessus, on établit que pour tout $P \in E, d(\Delta(P)) \leqslant d(P)$ (cela va nous servir)

   Reste bien sûr à établir la linéarité de Δ : soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E^2$, alors $\Delta(\lambda P + \mu Q) = (X^2 - 1)\, (\lambda P + \mu Q)'' + 2\, X\, (\lambda P + \mu Q)' = \lambda\, \Delta(P) + \mu\, \Delta(Q)$ ce qui montre que Δ est bien linéaire, et donc un endomorphisme de E.

   c. On calcule pour tout k, $\Delta(X^k) = (X^2 - 1)\, k\, (k-1)\, X^{k-2} + 2\, k\, X^k = k\, (k+1)\, X^k - k\, (k-1)\, X^{k-2}$. La matrice de Δ s'en déduit aisément :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & 6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2\, n\, (2\, n - 1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2\, n\, (2\, n + 1) \end{pmatrix}$$

   Cette matrice étant triangulaire, les valeurs propres de Δ s'en déduisent, et on voit ici qu'il s'agit des entiers $p\, (p+1)$ pour $0 \leqslant p \leqslant 2\, n$. Toutes ces valeurs propres sont simples, et il ne fait aucun doute que Δ est diagonalisable, et que tous ces espaces propres sont des droites vectorielles.

   d. On sait que E_{λ_k} l'espace propre de Δ associé à la valeur propre $\lambda_k = k\, (k+1)$ est une droite vectorielle. En notant P l'un des vecteurs propres de Δ associé à λ_k, alors dans $E_{\lambda_k} = \mathrm{Vect}(P)$ on voit bien qu'il n'existe qu'un, et un seul, polynôme unitaire P_k (lequel est $\frac{1}{a} P$ en notant a le coefficient dominant de P.)

   Reste à montrer que $d(P_k) = k$. Notons donc $p = d(P_k)$, alors $P_k(X) = X^p + Q$ où $d(Q) < p$. Mais alors $\Delta(P_k) = \Delta(X^p) + \Delta(Q)$. Mais comme $d(\Delta(Q)) \leqslant d(Q)$ et $\Delta(X^p) = p\, (p+1)\, X^p + p\, (p-1)\, X^{p-2}$, alors $\Delta(P_k)$ est de degré p et de coefficient dominant $p\, (p+1)$. Or on sait que $\Delta(P_k) = k\, (k+1)\, P_k$ donc le coefficient dominant de $\Delta(P_k)$ vaut également $k\, (k+1)$. Ainsi $k\, (k+1) = p\, (p+1)$ ce qui bien sûr n'est possible que si, et seulement si $p = k$. ($k \mapsto k\, (k+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$)

   On a donc bien établi qu'il existe P_k unitaire unique tel que $\Delta(P_k) = \lambda_k\, P_k$ et que de plus $d(P_k) = k$.

   e. On remarque que $\Delta(P) = ((X^2 - 1)\, P')'$ ce qui nous fait penser à une intégration par parties : étant donnés P et Q éléments de E , alors les fonctions $t \mapsto (t^2 - 1)\, P'(t)$ et $t \mapsto Q(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ il vient, par une intégration par parties :

$$\langle \Delta(P), Q \rangle = [(t^2 - 1)\, P'(t)\, Q(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t$$

   et, par un calcul identique :

$$\langle P, \Delta(Q) \rangle = \ldots = -\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t = \langle \Delta(P), Q \rangle$$

   (on dira bientôt que Δ est un endomorphisme *symétrique* de E)

Etant donnés $k \neq h$ alors $\langle \Delta(P_k), P_h \rangle = k\,(k+1)\,\langle P_k, P_h \rangle = \langle P_k, \Delta(P_h) \rangle = h\,(h+1)\,\langle P_k, P_h \rangle$ et comme $k\,(k+1) \neq h\,(h+1)$ alors $\langle P_k, P_h \rangle = 0$. De ce fait, $(P_0, \cdots, P_{2n})$ qui est une base de diagonalisation de Δ est orthogonale.

f. On peut noter que la restriction de Δ à F est encore diagonalisable (résultat classique du cours, lequel se déduit de ce que la restriction de Δ à F admet un polynôme annulateur scindé à racines simples), et que les valeurs propres de cette restriction sont parmi les λ_k où k est pair (car un vecteur propre associé à λ_k est un polynôme de degré k, et qu'un polynôme de F est forcément de degré pair), et de même les valeurs propres de la restriction de Δ à G sont parmi les λ_k où k est impair.

Mais alors F admet une base formée de vecteurs propres de Δ, extraite de $(P_0, P_2, \cdots, P_{2n})$ mais, pour une raison de dimension, cette base extraite ne peut être que $(P_0, P_2, \cdots, P_{2n})$ au complet, et pour la même raison, $(P_1, \cdots, P_{2n-1})$ constitue aussi une base de G.

3. a. $P_0 = 1$ (pas le choix !), $\Delta(X) = 2\,X$ et donc $P_1 = X$ et $\Delta(X^2) = 6\,X^2 - 2$ donc il vient $\Delta\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = 6\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$ et donc $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

Il reste à normaliser P_0, P_1, P_2 et le calcul donne $\langle P_0, P_0 \rangle = 2$, $\langle P_1, P_1 \rangle = \frac{2}{3}$ et $\langle P_2, P_2 \rangle = \frac{8}{45}$ et donc une base orthonormale de $E = \mathbb{R}_2[X]$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,X, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$.

b. $X \in G$ et $1 \in F$ et comme F et G sont supplémentaires orthogonaux, alors $d(A, G) = d(1, G) = \|1\| = \sqrt{2}$.

c. La matrice D de Δ selon la base (P_0, P_1, P_2) est diagonale de termes diagonaux (distincts) $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Il est classique d'établir que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales. Ainsi l'espace vectoriel formé par celui-ci est bien sûr de dimension 3, comme l'est celui des endormorphismes admettant selon (P_0, P_1, P_2) une matrice diagonale, et on reconnaît là le commutant de Δ.

Autre argument : d'après le cours, si deux endomorphismes de E commutent, alors tout espace propre de l'un est stable par l'autre. Si donc h commute avec Δ, alors les trois espaces propres de Δ que sont $\mathrm{Vect}(P_0)$, $\mathrm{Vect}(P_1)$ et $\mathrm{Vect}(P_2)$ sont stables par h, ce qui indique que P_0, P_1, P_2 sont aussi des vecteurs propres de h et que donc (P_0, P_1, P_2) est une base de diagonalisation commune de Δ et de h.

Un argument matriciel montre alors (synthèse) que si h est, tout comme Δ, diagonalisable selon la base (P_0, P_1, P_2), alors h et Δ commutent (puisque c'est le cas de leurs matrices selon cette base)

d. On cherche donc les racines carrées de Δ (question classique elle aussi) : si g en est une, alors g commute avec Δ et g est donc diagonalisable selon (P_0, P_1, P_2). En notant (μ_0, μ_1, μ_2) les valeurs propres de g correspondantes, alors $\mu_i^2 = \lambda_i = i\,(i+1)$ et donc $\mu_i = \pm\sqrt{i\,(i+1)}$ ce qui conduit à 4 racines carrées possibles de Δ (4 et non 8 car 0 n'admet bien sûr qu'une seule racine carrée...)