

## 1 Espaces préhilbertiens, euclidiens

Définition d'un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel  $F$  muni d'une base orthonormale (ou orthogonale). Distance de  $x$  à  $F$ . Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Espace euclidien, expression du produit scalaire selon une base orthonormale. Isométries vectorielles.

Matrices orthogonales et caractérisations. Isométries vectorielles du plan euclidien.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques. Théorème spectral. Matrices symétriques positives et définies positives.

Questions de cours :

- Projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  si  $F$  est muni d'une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  (théorème 14)
- Expression du produit scalaire selon une base orthonormale. (P.23)
- Définition d'une isométrie vectorielle de  $E$  euclidien (D.28), et sa caractérisation (P.29)
- Soit  $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ , alors  $u \in \mathcal{O}(E)$  si et seulement si  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est orthonormale. (P.30)
- Définition (D37) et caractérisation des matrices orthogonales (P39)