D.M. pour le 21/01 (sur cdp)

Dans ce problème, on étudie la série entière $\sum W_n\, x^n$ où $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un exercice classique vu en cours (intégrales de Wallis, exercice 4 du chapitre sur les séries numériques) établit que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,n}}$ (ce qu'on pourra utiliser sans le démontrer)

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum W_n\, x^n$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum W_n\, x^n$ en $x = R$ et en $x = -R$.

3. On fixe un réel $x \in]-1, 1[$, et on pose $f_n(t) = x^n \sin^n(t)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

   a. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $S\colon t \mapsto \dfrac{1}{1 - x\sin(t)}$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire que (on cite son cours avec précision !)

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} W_n\, x^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\sin(t)}.$$

4. Dans la suite du problème, on pose pour tout $x \in [-1, 1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n\, x^n$.

   a. Justifier que la fonction F est continue sur $]-1, 1[$.

   b. A l'aide du critère spécial des séries alternées (pensez à la majoration du reste), montrez que la série entière $\sum W_n\, x^n$ converge uniformément vers F sur $[-1, 0]$.

   c. En déduire que la fonction F est continue en -1.

   d. Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $u = \tan\!\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Vérifier que $\sin(t) = \dfrac{2\,u}{1 + u^2}$.

   e. À l'aide du changement de variable $u = \tan\!\left(\dfrac{t}{2}\right)$, établir que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\left(\arctan\!\left(\frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) + \arctan\!\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\right).$$

   f. En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arctan\!\left(\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\right).$$

   g. Montrer que $F(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2\,(1 - x)}}$. Qu'en déduire?

   h. Montrer que $F\,(-1) = 1$.