Matrices et déterminants

On désigne toujours par $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.

1 Matrices

1.1 Définition, structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

On rappelle qu'une matrice A de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est la donnée d'une famille $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ que l'on présente sous la forme $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$. L'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\cdot A$ est la matrice $\begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \cdots & \lambda\, a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \cdots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}$. Si $B=(b_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $A+B$ est la matrice $\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$

Proposition 1. *Muni des opérations définies ci-dessus, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\times p$ dont une base, nommée base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ où* $E_{i,j}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ *(l'unique coefficient non nul se trouvant à la ligne i et colonne j.)*

De plus, si A est la matrice de coefficients $a_{i,j}$, alors $A=\sum_{i,j} a_{i,j}\cdot E_{i,j}$.

1.2 Interprétation matricielle d'une application et produit matriciel

Définition 2. *(Matrice d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire)*

- *Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}=(f_1,\cdots,f_n)$, et soit $(x_1,\cdots,x_p)$ une famille de F, alors on appelle matrice de $(x_1,\cdots,x_p)$ selon $\mathcal{B}$ que l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_p)$ la matrice $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, $x_j=\sum_{i=1}^n a_{i,j}\cdot f_i$ (En d'autres termes, pour tout j, la colonne d'indice j de A est formée des coordonnées de x_j selon la base $\mathcal{B}$.)*

- *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}_E=(e_1,\cdots,e_p)$ et $\mathcal{B}_F=(f_1,\cdots,f_n)$ et soit $u:E\to F$ une application linéaire. On appelle matrice de u selon les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ la matrice $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de la famille $(u(e_1),\cdots,u(e_p))$ selon $\mathcal{B}_F$. En d'autres termes $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est constituée de n lignes et p colonnes, et la colonne d'indice j est formée des coordonnées de $u(e_j)$ selon $\mathcal{B}_F$.*

  (Cas particulier : si u est un endomorphisme de E et que la base $\mathcal{B}_E=(e_1,\cdots,e_p)$ de E est utilisée comme base de l'espace de départ comme de l'espace d'arrivée, au lieu de dire que A est la matrice de u selon les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_E$ on dira bien sûr qu'elle est la matrice de u selon $\mathcal{B}_E$ et on écrira également $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$.)

Proposition 3. *(Interprétation matricielle d'une application) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}_E=(e_1,\cdots,e_p)$ et $\mathcal{B}_F=(f_1,\cdots,f_n)$ et soit $u:E\to F$ une application linéaire, de matrice A selon $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit de plus $x\in E$ de coordonnées $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ selon $\mathcal{B}_E$, alors $u(x)$ a pour coordonnées $A\,X$ selon $\mathcal{B}_F$ où $A\,X$ est le vecteur colonne obtenu selon la règle LICOL : en pratique, en notant $C_1,\cdots,C_p$ les vecteurs colonnes de A, alors $A\,X=x_1\cdot C_1+\cdots+x_p\cdot C_p$.*

La règle de calcul pour le produit matriciel s'étend à deux matrices, pourvu que la première compte autant de colonnes que la second compte de lignes :

Définition 4. *(et proposition) Soient $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in M_{p,q}(\mathbb{K})$ dont on note $C_1,\cdots,C_q$ les vecteurs colonnes, alors on définit la matrice produit $A\,B\in M_{n,q}(\mathbb{K})$ comme la matrice dont la colonne d'indice k est formée de $A\,C_k$.*

En pratique, si A est la matrice de $u: E \to F$ selon des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ respectives de E et de F, et si B est la matrice d'une famille $(x_1, \cdots, x_q)$ de E selon la base $\mathcal{B}_E$, alors AB est la matrice de $(u(x_1), \cdots, u(x_q))$ selon la base $\mathcal{B}_F$.

Proposition 5. *Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n, p, q et munis de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$, et soient $u: E \to F$ et $v: F \to G$ des applications linéaires, et posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v)$, alors $BA = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u)$.*

1.3 Transposée

Définition 6. *Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on appelle **transposée** de A et on note ${}^tA$ ou encore A^T la matrice de p lignes et n colonnes dont le coefficient de ligne i et colonne j vaut $a_{j,i}$.*

En pratique, les lignes de A deviennent donc les colonnes de ${}^tA$ tout comme les colonnes de A deviennent les lignes de ${}^tA$.

Proposition 7. *Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$*

1.4 Matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $M_n(\mathbb{K})$ pour abréger (plutôt que $M_{n,n}(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices de n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. D'après la règle donnée, deux matrices éléments de $M_n(\mathbb{K})$ peuvent être multipliées, et leur produit est encore une matrice de n lignes et n colonnes. Le produit matriciel est associatif (on peut le vérifier à la main, mais c'est lourd, ou bien le déduire de l'interprétation matricielle de la composée d'endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n) et on connaît un élément neutre de $M_n(\mathbb{K})$ pour le produit : la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (dont on peut remarquer qu'elle est la matrice de Id_E selon n'importe quelle base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n)

1.4.1 Matrices de forme particulière (symétrique, diagonale, triangulaire)

Définition 8. *$A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonale** si, et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.*

*A est dite **triangulaire supérieure** si, et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.*

*A est dite **triangulaire inférieure** si, et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.*

Proposition 9. *Toute combinaison linéaire, produit de matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) d'ordre n est une matrice diagonale (resp. une matrice triangulaire supérieure, resp. une matrice triangulaire inférieure)*

Définition 10. *$A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ est dite*

- ***symétrique** si, et seulement si ${}^tA = A$*
- ***antisymétrique** si, et seulement si ${}^tA = -A$*

On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et par $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Proposition 11. *$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux espaces supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$, ainsi toute matrice carrée d'ordre n se décompose uniquement en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

1.4.2 Matrices inversibles

Définition 12. *$A = (a_{i,j})$ est dite **inversible** si, et seulement si, il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.*

*Une telle matrice B est alors unique, c'est l'**inverse** de A et elle est notée A^{-1}.*

L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque 13. Comme la notation l'indique (GL sont les initiales de « groupe linéaire ») l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n forme un groupe pour la multiplication matricielle : en d'autres termes, la multiplication est une loi interne à $GL_n(\mathbb{K})$: le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible. Le produit matriciel est une loi associative (on le savait déjà), il y a un neutre pour $\times$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ (il s'agit bien sûr de I_n) et enfin tout élément de $GL_n(\mathbb{K})$ est symétrisable… (Bien sûr, le symétrique de $A \in GL_n(\mathbb{K})$ n'est autre que sa matrice inverse A^{-1})

Proposition 14. *Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ de vecteurs lignes $L_1, \cdots, L_n$, de vecteurs colonnes $C_1, \cdots, C_n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. *A est inversible*

ii. *$(C_1, \cdots, C_n)$ forme une base de $\mathbb{K}^n$*

iii. *$(L_1, \cdots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}^n$*

iv. *l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est bijectif*

v. *${}^tA$ est inversible*

vi. *il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A\,B = I_n$*

vii. *il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B\,A = I_n$*

Proposition. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

- *Si A est la matrice de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ selon $\mathcal{B}$, alors A est inversible si et seulement si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E.*

- *Si A est la matrice de l'endomorphisme u de E selon la base $\mathcal{B}$, alors A est inversible si et seulement si u est un automorphisme de E.*

1.4.3 Matrices de passage, formules de changement de base

Définition 15. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ selon la base $\mathcal{B}$ (nouvelle base selon l'ancienne). On pourra noter $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ cette matrice. (Une autre notation possible : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$)*

Proposition 16. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases de E :*

i. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = I_n$

ii. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

iii. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$

iv. *$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$*

Théorème 17. *(formule de changement de base pour un vecteur) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit $x \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ selon $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ selon $\mathcal{B}'$, alors $X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,X'$*

Proposition 18. *(extension à une famille de vecteurs) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit $(x_1, \cdots, x_p)$ de matrice M selon la base $\mathcal{B}$ et M' selon la base $\mathcal{B}'$, alors $M = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,M'$*

Théorème 19. *(formule de changement de bases pour une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u: E \to F$ une application linéaire. On suppose que $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_E'$ sont des bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_F'$ des bases de F, et soient $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E',\mathcal{B}_F'}(u)$, alors*

$$M' = P_{\mathcal{B}_F'\to\mathcal{B}_F}\,M\,P_{\mathcal{B}_E\to\mathcal{B}_E'}$$

Remarque 20. Un moyen mnémotechnique pour citer sans erreur cette importante formule est déjà de se souvenir que la matrice d'une application linéaire ne prend sens qu'une fois choisies deux bases : une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée et, au brouillon, il peut être judicieux d'écrire de part et d'autre de la matrice M d'une application u les bases employées pour définir cette matrice : ${}_{\mathcal{B}_F}M_{\mathcal{B}_E}$ (pourquoi $\mathcal{B}_E$ à droite ? n'oubliez pas que l'argument x d'une fonction s'écrit lui aussi à droite, ainsi on écrit $y = f(x)\ldots$).

Ensuite, on réalise que le produit par la droite par la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E}$ permet donc de changer la base de l'espace de départ, et que le produit par la gauche par la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'_F \to \mathcal{B}_F}$ permet donc de changer la base choisie de l'espace d'arrivée.

La formule de changement de base s'écrit donc : ${}_{\mathcal{B}'_F}M'_{\mathcal{B}'_E} = P_{\mathcal{B}'_F \to \mathcal{B}_F}\, {}_{\mathcal{B}_F}M_{\mathcal{B}_E}\, P_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E}$. Attention : cette notation n'est en aucun cas standard, donc réservez ce genre d'écriture au brouillon, ou écrivez sur votre copie les guidons au crayon à papier et n'oubliez pas de les effacer.

Proposition 21. *(Formule de changement de base pour un endomorphisme) Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et soient M et M' les matrices respectives de u selon $\mathcal{B}$ et selon $\mathcal{B}'$, alors $M' = P^{-1} M P$ en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.*

Remarque 22. Je ne saurais trop vous conseiller, ici aussi, de rajouter au brouillon les bases employées, en n'oubliant pas que quand on parle de la matrice de u selon la base $\mathcal{B}$ de E, la base $\mathcal{B}$ est en fait employée deux fois : une fois comme base de l'espace de départ de u (qui est E) et une seconde fois comme base de son espace d'arrivée (qui est encore $E\ldots$)

Ainsi on part de ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}$ et on souhaite parvenir à ${}_{\mathcal{B}'}M'_{\mathcal{B}'}$ et on écrit donc (au brouillon !)

$$ {}_{\mathcal{B}'}M'_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \times {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} $$

et la formule attendue s'en déduit aussitôt.

1.5 Image, rang et noyau d'une matrice

Définition 23. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de vecteurs colonnes $(C_1, \cdots, C_p)$, on appelle **image** de A l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_p)$, le **rang** de A n'est autre que le rang de sa famille de vecteurs colonnes $(C_1, \cdots, C_p)$, et le **noyau** de A est l'ensemble $\{X \in \mathbb{K}^p | A X = 0_{\mathbb{K}^n}\}$.*

Si $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est l'application linéaire canoniquement associée à A, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, A$, $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, A$ et bien sûr aussi $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, A$.

Remarque 24. L'étude du rang d'une matrice carrée est, sans surprise, un moyen de discuter de son inversibilité : ainsi si A est carrée d'ordre n, alors A est inversible si et seulement son rang vaut n. Bien entendu, on peut aussi raisonner sur son noyau : A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$.

Proposition 25. *Soit F un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et soit $(x_1, \cdots, x_p) \in F^p$ de matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ selon la base $\mathcal{B}_F$, alors $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\,(x_1, \cdots, x_p)$*

Proposition 26. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et soit $u : E \to F$ linéaire, de matrice A selon les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, A$.*

Les deux propositions suivantes se déduisent alors directement des résultats analogues énoncés pour des applications linéaires :

Proposition 27. *Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A\, B) \leqslant \min\,(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$*

Proposition 28. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $U \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{rg}(U A) = \mathrm{rg}\, A$*

Si $V \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(A\, V) = \mathrm{rg}\, A$.

Proposition 29. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg}\, A$. Ainsi le rang de A est également le rang de sa famille de vecteurs lignes.*

Remarque 30. Sur des matrices assez simples, comportant jusqu'à 4 colonnes environ, la détermination de l'image, du noyau et du rang sont assez faciles, et s'obtiennent le plus souvent avec des calculs minimaux : je recommande de chercher d'abord l'image en remarquant que $(C_1, \cdots, C_p)$ la famille des vecteurs colonnes en est une famille génératrice, et d'en chercher une base extraite. Le rang se déduit de cette étude, mais aussi une base du noyau, par les relations de dépendance linéaire relatifs aux vecteurs colonnes que l'on exclut :

Soit par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ de vecteurs colonnes $C_1, \cdots, C_4$. On cherche à extraire une base de $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \cdots, C_4)$. C_1 n'est pas nul, donc on part de (C_1) puis $C_2 = 2 \cdot C_1$. On en reste pour l'instant à (C_1). C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires (nul besoin de poser de calculs pour s'en assurer ou le justifier, cela saute aux yeux) et donc (C_1, C_3) est libre. C_4 enfin, s'il n'est pas colinéaire à C_1 ni à C_3 en est une combinaison linéaire des deux puisque $C_4 = C_1 + C_3$.

Ainsi (C_1, C_3) est une base de $\operatorname{Im} A$. (D'autres choix de deux éléments parmi $(C_1, \cdots, C_4)$ sont bien entendu possibles)

Le rang 2 de A s'en déduit, mais aussi le noyau, car la relation $2 \cdot C_1 - C_2 = 0$ indique que $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tandis que $C_1 + C_3 - C_4 = 0$ indique que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille de $\operatorname{Ker} A$. Sa liberté ne faisant aucun doute, on a ainsi trouvé une base de $\operatorname{Ker} A$.

1.6 Matrices définies par blocs

Etudions déjà un cas particulier (mais important) :

Proposition 31. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension finie p et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E adaptée à F (autrement dit telle que $(e_1, \cdots, e_p)$ soit une base de F, et soit u un endomorphisme de E qui stabilise F, alors la matrice de u selon $\mathcal{B}$ prend la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A est une matrice carrée d'ordre p, C est une matrice carrée d'ordre $n-p$, B est une matrice de p lignes et $n-p$ colonnes…*

Remarque 32. Avec les notations de la proposition précédente, A est la matrice selon $(e_1, \cdots, e_p)$ de l'endomorphisme de F qu'induit alors u.

Plus généralement, si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, et si p_1, p_2, n_1 et n_2 sont des naturels tels que $p = p_1 + p_2$, $n = n_1 + n_2$ on découpe la matrice A de manière analogue, en des blocs de n_1 et n_2 lignes, et p_1 et p_2 colonnes ainsi :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p_1}{\longleftrightarrow} & \overset{p_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array}$$

Produit par blocs : soient $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ de telle sorte que les largeurs des blocs de A soient de p_1 et p_2 colonnes comme sont les hauteurs des blocs de B (comptant donc n_1 et n_2 lignes), alors les produits $A_{1,1} B_{1,1}$, $A_{1,1} B_{1,2}$, $A_{1,2} B_{2,1}$, $A_{1,2} B_{2,2}$ (et encore 4 autres à déterminer) prennent du sens, et le produit $A B$ prend la forme :

$$A B = \begin{pmatrix} A_{1,1} B_{1,1} + A_{1,2} B_{2,1} & A_{1,1} B_{1,2} + A_{1,2} B_{2,2} \\ A_{2,1} B_{1,1} + A_{2,2} B_{2,1} & A_{2,1} B_{1,2} + A_{2,2} B_{2,2} \end{pmatrix}$$

(On peut le vérifier par le calcul, en découpant en deux sommes chaque coefficient de la matrice produit…)

Il n'y a pas de raison de s'arrêter à des découpages de matrices en 4 blocs, et la règle de produit par blocs introduite ci-dessus s'étend elle aussi à des blocs plus nombreux pourvu que les découpages soient compatibles : pour que le calcul par blocs de $A B$ soit possible, il faut déjà bien sûr que A compte autant de colonnes que B compte de lignes, mais il faut de plus que le découpage en blocs verticaux soit en nombre et en tailles égaux au découpage de B en blocs horizontaux. A partir de là, la même règle s'applique pour le produit par blocs : à savoir tout simplement la règle LICOL généralisée à des blocs… (Attention toutefois, s'agissant de blocs matriciels, on ne peut intervertir les blocs dans les produits…)

Remarque 33. On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et que $E_1, \cdots, E_m$ sont des sous-espaces vectoriels de E munis de bases respectives $(e_{1,1}, \cdots, e_{1,p_1}), \cdots, (e_{m,1}, \cdots, e_{m,p_m})$ et soit u un endomorphisme de E.

Si $E_1, \cdots, E_m$ sont stables par u, alors la matrice selon la base $\mathcal{B} = (e_{1,1}, \cdots, e_{1,p_1}, \cdots, e_{m,1}, \cdots, e_{m,p_m})$ prend la forme $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix}$ où pour tout i, A_i est une matrice carrée d'ordre p_i. On dit de M qu'elle est **diagonale par blocs**.

Bien sûr, pour tout i, on note que A_i est la matrice selon $(e_{i,1}, \cdots, e_{i,p_i})$ de l'endomorphisme de E_i qu'induit u.

Exercice 1. On garde les mêmes notations que la remarque précédente ($E, E_1, \cdots, E_n$, la base $\mathcal{B}$ et u) A quelle condition, nécessaire et suffisante la matrice M de u selon $\mathcal{B}$ est-elle triangulaire supérieure ? Triangulaire inférieure ?

1.7 Matrices semblables

Définition 34. *Soient A et B des matrices carrées d'ordre n. On dit que A et B sont **semblables** si, et seulement si, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} A P$.*

Remarque 35. La relation précédente ressemble beaucoup à la formule de changement de base pour un endomorphisme de E, et ceci indique que si u est un endomorphisme de E et qu'on écrit sa matrice M selon une base $\mathcal{B}$ de E, puis sa matrice M' selon une autre base $\mathcal{B}'$ de E, alors M et M' sont semblables.

1.8 Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

Définition 36. *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n, alors on appelle **trace** de A, et on note $\mathrm{Tr}(A)$ (ou bien $\mathrm{tr}(A)$) le scalaire $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (la somme des coefficients diagonaux donc)*

Proposition 37. $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est linéaire (c'est donc une forme linéaire)*

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}({}^t\!A) = \mathrm{Tr}(A)$

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(A\,B) = \mathrm{Tr}(B\,A)$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n semblables, alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$

Corollaire 38. *(et définition) Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors le scalaire $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas du choix d'une base $\mathcal{B}$ de E. Il est appelé **trace** de u et est noté $\mathrm{Tr}(u)$.*

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. On suppose que p est un projecteur de E, de rang r. Que vaut sa trace ?

2. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, de dimensions respectives p et q, et soit s la symétrie d'axe F et de direction G. Que vaut la trace de s ?

2 Déterminants

2.1 Rappels

2.1.1 Déterminants

Définition 39. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, alors il existe une unique application $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui soit :*

- *linéaire selon chacune de ses variables (i.e. : pour tout i, pour tous $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, $x_i' \in E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $f(x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu x_i', \cdots, x_n) = \lambda f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + \mu f(x_1, \cdots, x_i', \cdots, x_n)$)*

- *alternée (i.e. : si il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$)*

- *$f(e_1, \cdots, e_n) = 1$.*

On l'appelle déterminant de E selon la base $\mathcal{B}$, et on note $\det_{\mathcal{B}}$ cette application.

De plus, si $g : E^n \to \mathbb{K}$ est également alternée et linéaire selon chacune de ses variables, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

Remarque 40. La démonstration est hors-programme. Montrons tout de même l'unicité en dimension 2 : supposons que f convienne, et soit $(x_1, x_2) = (a_{1,1}\, e_1 + a_{2,1}\, e_2, a_{1,2}\, e_1 + a_{2,2}\, e_2) \in E^2$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, x_2) & = & a_{1,1}\, a_{1,2}\, f(e_1, e_1) + a_{1,1}\, a_{2,2}\, f(e_1, e_2) + a_{2,1}\, a_{1,2} f(e_2, e_1) + a_{2,1}\, a_{2,2}\, f(e_2, e_2) \\ & = & 0 + a_{1,1}\, a_{2,2}\, f(e_1, e_2) + a_{2,1}\, a_{1,2} f(e_2, e_1) + 0 \\ & = & a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{2,1}\, a_{1,2} \end{array}$$

Ce faisant, on a ici montré qu'il ne peut effectivement exister, au plus, qu'une telle fonction f multilinéaire (i.e. linéaire selon chacune de ses variables) alternée de E^2 dans $\mathbb{K}$. Il resterait à montrer que f ainsi obtenue convient. (Au fond, il s'agit ici d'une analyse-synthèse)

En dimension 3, par le même raisonnement, on retrouve bien sûr la formule de Sarrus : $f(x_1, x_2, x_3) = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3}$, et, en dimension n, on parviendrait à une somme de $n!$ termes… (24 donc en dimension 4, autant dire que la règle de Sarrus ne se généralise pas à des dimensions ultérieures !)

Proposition 41. *Soit E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, et soient $i < j$ éléments de $[\![1, n]\!]$, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = -\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$ ($\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique)*

Lemme 42. *Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille liée et $f : E^n \to \mathbb{K}$ est alternée et linéaire selon chacune de ses variables, alors $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$.*

Théorème 43. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, et soit $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, alors $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.*

Proposition 44. *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$. En particulier : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.*

2.1.2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 45. *(et proposition) Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, et soit f un endomorphisme de E, alors le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E. On le nomme **déterminant de f** et on le note $\det(f)$.*

De plus, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = \det(f) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$.

Proposition 46. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.*

Proposition 47. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.*

Théorème 48. *Soit f un endomorphisme de E de dimension finie, alors f est un automorphisme de E si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$. De plus, si tel est le cas, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.*

2.1.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 49. *Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, de vecteurs colonnes $C_1, \cdots, C_n$, alors on appelle déterminant de A le déterminant de la famille $(C_1, \cdots, C_n)$ selon la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On notera $\det(A)$ ce scalaire.*

Remarque 50. De la définition du déterminant de A, on déduit que le déterminant est n-linéaire alterné par rapport aux colonnes de A. La linéarité suivant la colonne d'indice j exprime que :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \lambda\, a_{1,j} + \mu\, a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & \lambda\, a_{i,j} + \mu\, a'_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \lambda\, a_{n,j} + \mu\, a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a'_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et le caractère alterné exprime quant à lui que si A a deux colonnes identiques, alors $\det(A)=0$.

On remarque de plus que $\det(I_n)=1$.

Proposition 51. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$, et soit $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$ admettant pour matrice $A=(a_{i,j})$ selon la base $\mathcal{B}$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_n)=\det(A)$.*

Proposition 52. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$ et soit f un endomorphisme de E, alors $\det(f)=\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.*

Proposition 53. *Soient A et B éléments de $M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A\times B)=\det(A)\times\det(B)$.*

Proposition 54. *Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$ et, si tel est le cas, $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$.*

Proposition 55. *Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det A=\det {}^tA$.*

2.1.4 Opérations élémentaires

Proposition 56. *Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$*

1. *Etant donnés $i\neq j$ éléments de $[\![1,n]\!]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on note A' la matrice obtenue à partir de A et de l'opération élémentaire $C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j$ (resp. $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$), alors $\det(A')=\det(A)$*

2. *Etant donnés $i\neq j$ éléments de $[\![1,n]\!]$, on note A' la matrice obtenue à partir de A et de l'opération élémentaire $C_i\leftrightarrow C_j$ (resp. $L_i\leftrightarrow L_j$) alors $\det(A')=-\det(A)$.*

3. *Etant donnés $i\in[\![1,n]\!]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on note A' la matrice obtenue à partir de A et de l'opération élémentaire $C_i\leftarrow\lambda C_i$ (resp. $L_i\leftarrow\lambda L_i$) alors $\det(A')=\lambda\det(A)$.*

2.2 Calcul de déterminants par blocs

Lemme 57. *Soit $A\in M_p(\mathbb{K})$, $B\in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et soient M et N les matrices définies par blocs : $M=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & I_q\end{pmatrix}$ alors $\det M=\det N=\det A$.*

Proposition 58. *Soit M la matrice définie par blocs par $M=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$ où $A\in M_p(\mathbb{K})$ et $C\in M_q(\mathbb{K})$, alors $\det M=\det A\times\det C$.*

Remarque 59. On généralise (on le justifierait par récurrence) que si M prend la forme $\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & *\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & *\\ 0 & \cdots & 0 & A_n\end{pmatrix}$ où $A_1,\cdots,A_n$ sont des matrices carrées que $\det M=\det A_1\times\cdots\times\det A_n$. Il en va de même bien sûr si M prend une forme triangulaire inférieure avec des blocs diagonaux carrés.

Bien sûr, rien n'interdit que les blocs diagonaux soient réduits à de simples coefficients, et ainsi on obtient ainsi que si M est triangulaire alors son déterminant est le produit des termes diagonaux. (Bien sûr, on pouvait l'établir directement avec les propriétés du déterminant et des opérations élémentaires.)

2.3 Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Définition 60. *Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.*

i. On appelle **mineur relatif à a_{ij}** *de A le déterminant Δ_{ij} de la matrice extraite de A en retirant la ligne i et la colonne j :* $\Delta_{ij}=\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n}\\ \hline a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right|$.

*ii. On appelle **cofacteur relatif à a_{ij}** de A le réel $(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$. (On le note souvent $A_{i,j}$)*

Remarque 61. Le signe $(-1)^{i+j}$ de la définition du cofacteur change à chaque fois que l'on se déplace d'une position vers la droite ou la gauche, vers le haut ou le bas, et il est positif pour tous les coefficients diagonaux de la matrice M, donc par exemple pour une matrice d'ordre 4, la « règle des signes » est $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$. On notera que relativement aux coefficients diagonaux, le signe est toujours $+$.

Théorème 62. *(développement suivant une ligne ou une colonne) Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$, alors*

- *développement suivant une colonne :*

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$$

- *développement suivant une ligne :*

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$$

2.4 Déterminants de Vandermonde

Proposition 63. *Pour tout $(a_0,\cdots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$*

$$V_n(a_0,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}=\prod_{i<j}(a_j-a_i)$$