Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, on désignera par $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou bien celui des complexes $\mathbb{C}$, mais la théorie s'appliquerait aussi à tout sous-corps de $\mathbb{C}$ tel que, par exemple, le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.

1 Espaces vectoriels (rappels)

Définition 1. *On rappelle qu'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée additivement $+$ ainsi que d'une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ telles que :*

- $\forall (x,y) \in E^2, x+y=y+x$ *(+ est commutative)*
- $\forall (x,y,z) \in E^3, x+(y+z)=(x+y)+z$ *(+ est associative)*
- *E dispose d'un neutre 0_E pour $+$ c'est-à-dire tel que $\forall x \in E, 0_E + x (= x + 0_E) = x$*
- *Tout élément $x \in E$ admet un symétrique (forcément unique) pour $+$, noté $-x$. (L'unicité du symétrique provient de ce que si x admet deux symétriques y et z pour $+$, alors $y+x+z=(y+x)+z=0_E+z=z$ et de même $y+x+z=y+(x+z)=y+0_E=y$ et ainsi on a bien $y=z$.)*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x,y) \in E^2$,

  i. $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

  ii. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

  iii. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$

  iv. $1 \cdot x = x$

Remarque 2. Si on omet les propriétés relatives à la multiplication externe, les propriétés évoquées ci-dessus font de $(E,+)$ un **groupe** que l'on peut préciser **commutatif** (car + est commutative) et on parle aussi dans ce cas de groupe abélien. L'étude des groupes n'est pas au programme de la PC, mais on verra au long de l'année quelques exemples de groupes.

Proposition 3. *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, alors $\lambda \cdot x = 0_E$ si et seulement si ($\lambda = 0$ ou $x = 0_E$)*

De plus $-x$, le symétrique de x pour $+$ dans E s'écrit aussi $-1 \cdot x$ (où $-1 \in \mathbb{K}$ bien sûr)

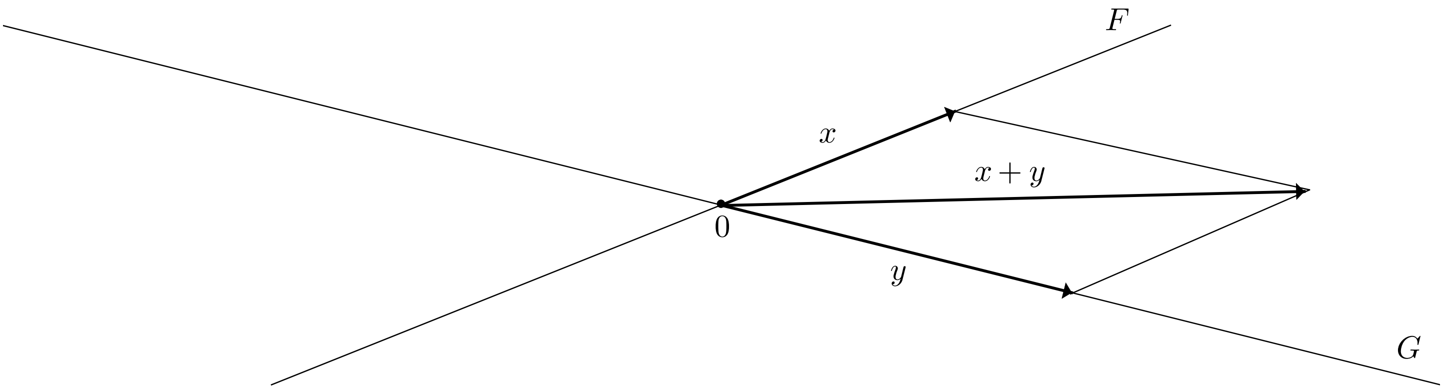
Définition 4. *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \varnothing$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x,y) \in F^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$.*

Proposition 5. *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$, et F muni des lois $+$ et $\cdot$ est à son tour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple 6.

- Dans l'espace des suites $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, l'ensemble des suites convergentes, l'ensemble des suites bornées, l'ensemble des suites à support fini (c'est-à-dire qui sont identiquement nulles à partir d'un certain rang) forment des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
- Dans l'espace des fonctions $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des fonctions dérivables, celles de classe $\mathcal{C}^n$ sont des sous-espaces vectoriels, comme l'ensemble des fonctions bornées, celles qui s'annulent en un certain $x_0 \in I$...

Remarque 7. Il est judicieux lorsqu'on se pose des questions générales sur les espaces vectoriels de faire un dessin, et pour représenter un espace vectoriel, on décide d'une origine qui va désigner le vecteur nul, et grâce à cette origine chaque vecteur peut alors être désigné par son extrémité, autrement dit un point. Ainsi sur le schéma qui suit, deux droites vectorielles F et G sont représentées, chaque « point » de F ou de G désignant donc un vecteur, celui issu de l'origine O et d'extrémité le point choisi :



1.1 Espaces vectoriels engendrés

Proposition 8. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$ −espace vectoriel *E, alors $\cap_{i\in I}F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 9. *(et proposition) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$, alors $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A\subset F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E, le plus petit pour l'inclusion contenant A. On appelle celui-ci l'**espace vectoriel engendré** par F et on le note* $\mathrm{Vect}(A)$.

Définition 10. *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de E, alors on dit de $x\in E$ qu'il est une **combinaison linéaire** des x_i si et seulement si il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{K}$ telle que $x = \sum_{i\in I}\lambda_i\cdot x_i$.*

Proposition 11. *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de E, alors* $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$ *est l'ensemble $\{\sum_{i\in I}\lambda_i\cdot x | (\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I\}$ des combinaisons linéaires des x_i.*

1.2 Familles libres, génératrices, bases

Définition 12. *On dit de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ qu'elle est **libre** si et seulement si pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot x_i = 0_E \Rightarrow \forall i\in[\![1,n]\!], \lambda_i = 0$.*

*On dit qu'elle est **génératrice** de E si et seulement si tout élément de E est combinaison linéaire des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, enfin $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est appelée **base** de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Proposition 13. *(caractérisation d'une base) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1,\cdots,e_n)$ une famille de E, alors $(e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall x\in E, \exists!(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, x = \lambda_1\cdot e_1+\cdots+\lambda_n\cdot e_n$.*

Définition 14. *D'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$, on dit qu'il est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie.*

Lemme 15. *Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ une famille libre de E et soit $e_{n+1}\in E$, alors $(e_1,\cdots,e_{n+1})$ est liée si et seulement si* $e_{n+1}\in\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)$

Remarque 16. Le lemme précédent, très simple, donne une bonne intuition de la liberté d'une famille. Pour étudier la liberté d'une famille $(x_1,\cdots,x_n)$, on commence par regarder x_1 et on s'assure qu'il est non nul (sans quoi c'est déjà terminé bien sûr, la famille $(x_1,\cdots,x_n)$ étant liée).

Puis on regarde si x_2 est ou non colinéaire à x_1. S'il est colinéaire à x_1, c'est donc que (x_1,x_2) est liée et bien sûr alors $(x_1,\cdots,x_n)$ est à plus forte raison liée.

Puis on regarde si x_3 est ou non combinaison linéaire de x_1 et x_2, et ainsi de suite.

On rappelle encore :

Proposition 17.

- *Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(g_1, \cdots, g_m)$ en est une famille génératrice, alors il existe $q \in [\![0, m]\!]$, $j_1, \cdots, j_q$ éléments distincts de $[\![1, m]\!]$ tels que $(e_1, \cdots, e_p, g_{j_1}, \cdots, g_{j_q})$ soit une base de E.*

- *Si E est de dimension finie, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E, et d'une famille génératrice de E on peut extraire une base de E.*

Théorème 18. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal. Si n est celui-ci, une famille libre ne peut compter qu'au plus n vecteurs, et si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille libre de E, alors c'en est une base.*

Mais aussi : une famille génératrice de E compte au moins n vecteurs, et si $(g_1, \cdots, g_n)$ est une famille génératrice de E, alors c'en est une base.

Exemple 19. Le plus souvent, on travaillera sur des espaces tels que $\mathbb{K}^p$ pour $p \in \mathbb{N}$. De cet espace, on connaît une base bien particulière appelée **base canonique** formée des vecteurs $e_1, \cdots, e_p$ où $e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (le 1 se situe à la j-ième place)

Cette base a la propriété remarquable que si $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, alors son p-uplet de coordonnées n'est autre que $(x_1, \cdots, x_p)$ et on ne peut faire la différence entre x et ses coordonnées, ce qui est bien commode.

Il ne faut pas faire de ce cas particulier une généralité ! Dans un espace vectoriel E quelconque de dimension p, on ne peut confondre un élément x de E et son p-uplet de coordonnées $(x_1, \cdots, x_p)$ selon une base donnée de E (et il y a fort à parier qu'on ne puisse non plus parler de base canonique de E.)

Théorème 20. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et si F en est un sous-espace vectoriel, alors $\dim F \leqslant n$ avec égalité si, et seulement si, $F = E$.*

*Vocabulaire : on appelle base de E **adaptée** à F, en notant p la dimension de F, une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \cdots, e_p)$ forme une base de F. (En pratique, une base de E adaptée à F s'obtient donc en partant d'une base de F et en complétant celle-ci en une base de E)*

Définition 21. *(rang d'une famille) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille de E, alors on appelle rang de $(x_1, \cdots, x_p)$ et on note $\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_p)$ la dimension de $\operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$.*

Proposition 22. $\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant p$ *et il y a égalité si, et seulement si*

1.3 Somme de sous-espaces

On a vu que toute intersection de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E. Il n'en va pas du tout de même d'une union de sous-espaces vectoriels :

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Ce qui remplace l'union de sous-espaces vectoriels est la somme :

Définition 23. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors on désigne par $F + G$ l'ensemble $\{x + y | (x, y) \in F \times G\}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G (autrement dit l'espace vectoriel qu'engendre $F \cup G$)*

Plus généralement, si $F_1, \cdots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors on désigne par $F_1 + \cdots + F_n$ l'ensemble $\{x_1 + \cdots + x_n | (x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$ (lui aussi n'est autre que l'espace vectoriel engendré par $F_1 \cup \cdots \cup F_n$).

Définition 24. *Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits **supplémentaires** dans E, ce que l'on note $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.*

*De deux sous-espaces F et G de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$ on dit qu'ils sont **en somme directe** et il est permis de noter $F \oplus G$ leur somme (ce faisant, on ne désigne pas un autre ensemble que $F + G$ mais on indique la propriété supplémentaire que $F \cap G = \{0_E\}$)*

Proposition 25. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E*

- $E = F \oplus G$ *si et seulement si* $\forall x \in E, \exists!(y,z) \in F \times G, x = y + z$
- F *et* G *sont en somme directe si et seulement si* $\forall (y,z) \in F \times G, y + z = 0_E \Rightarrow y = z = 0_E$.

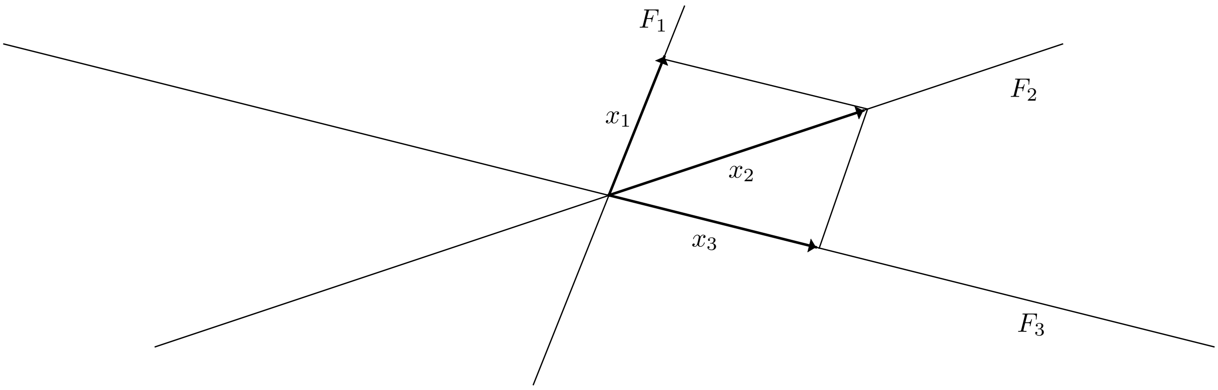
Il est aussi judicieux de raisonner sur des bases :

Proposition 26. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E munis de bases respectives $(f_1, \cdots, f_p)$ et $(g_1, \cdots, g_q)$, alors*

- $E = F \oplus G$ *si et seulement si* $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ *est*
- F *et* G *sont en somme directe si et seulement si* $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ *est une famille*
- $E = F + G$ *si et seulement si* $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ *est une famille*

Corollaire 27. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E, alors il existe G un sous-espace vectoriel de E supplémentaire à F.*

On ne s'arrête pas aux sommes directes de deux sous-espaces de E, mais il y a un piège :



Ici, F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux en somme directe : $F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$. Pourtant, on ne dira pas de F_1, F_2 et de F_3 qu'ils sont en somme directe car la propriété qui nous intéresse est que tout élément de $F_1 + F_2 + F_3$ ne puisse s'écrire en la somme d'un élément de F_1, d'un élément de F_2 et d'un élément de F_3 que d'une et d'une seule façon. Or ici, on a $x_2 = x_1 + x_3$ dont il est au moins un élément qui admet plusieurs décompositions (et on devine que tout élément de $F_1 + F_2 + F_3$ admet en fait de multiples décompositions)

Définition 28. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors on dira de $F_1, \cdots, F_n$ qu'ils sont* **en somme directe** *et on pourra noter $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ leur somme $F_1 + \cdots + F_n$ si, et seulement si*

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, x_1 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0_E$$

Remarque 29. Une conséquence immédiate de cette définition est bien le fait que tout élément de $F_1 + \cdots + F_n$ n'admet qu'une seule écriture en la somme d'un élément de $F_1, \cdots, F_n$, car si $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ sont des éléments de $F_1 \times \cdots \times F_n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$, alors $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_n - y_n) = 0_E$ et, par définition, $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0_E$.

Proposition 30. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E munis de bases respectives $(f_{1,1}, \cdots, f_{1,p_1}), \cdots, (f_{n,1}, \cdots, f_{n,p_n})$ alors*

- $E = F_1 + \cdots + F_n$ *si, et seulement si* $(f_{1,1}, \cdots, f_{1,p_1}, \cdots, f_{n,1}, \cdots, f_{n,p_n})$ *est*
- $F_1, \cdots, F_n$ *sont en somme directe si, et seulement si* $(f_{1,1}, \cdots, f_{1,p_1}, \cdots, f_{n,1}, \cdots, f_{n,p_n})$ *est*
- *Ainsi* $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ *si et seulement si* $(f_{1,1}, \cdots, f_{1,p_1}, \cdots, f_{n,1}, \cdots, f_{n,p_n})$ *est*

Remarque 31. Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ alors la base de E formée de la réunion d'une base de F_1, de F_2 jusqu'à une base de F_n est ce qu'on appelle une base **adaptée** à la décomposition $E = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$

En sens inverse, si on part d'une base $(e_1, \cdots, e_p)$ de E et qu'on partitionne $\{1, \cdots, p\}$ en $I_1, \cdots, I_n$, et qu'on note pour tout k, $F_k = \mathrm{Vect}((e_j)_{j \in I_k})$, alors bien sûr $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Proposition 32. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors* $\dim \sum F_i \leqslant \sum \dim F_i$ *et, de plus, il y a égalité des dimensions si et seulement si la somme $\sum F_i$ est directe.*

Proposition 33. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors* $\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$

1.4 Produit d'espaces vectoriels

Définition 34. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors le produit cartésien $E \times F$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la somme $+$ définie par*

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall (x', y') \in E \times F, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et le produit externe $\cdot$ défini par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E \times F, \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

De même, si $E_1, \cdots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est lui aussi muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $.$ définies par

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \forall (y_1, \cdots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \lambda \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \cdots, \lambda \cdot x_n)$$

Proposition 35. *Si E et F sont de dimensions finies respectives n et p, et munis de bases respectives $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$ alors $E \times F$ est de dimension finie* *et admet pour base*

Remarque 36. On généralise bien sûr sans trop de peine le résultat précédent à un produit fini quelconque d'espaces vectoriels : $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie dès lors que $E_1, \cdots, E_n$ le sont, et sa dimension vaut $\sum \dim E_i$.

2 Applications linéaires

Définition 37. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors on dit d'une application $f : E \to F$ qu'elle est un* ***morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels*** *ou encore une* ***application linéaire*** *si et seulement si*

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

Si tel est le cas, on appelle ***image*** *de f et on note $\mathrm{Im}\, f$ l'ensemble $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ et* ***noyau*** *de f qu'on note $\mathrm{Ker}\, f$ l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}$.*

Proposition 38. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors*

- $f(0_E) = 0_F$
- *Si H est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F*
- *Si H' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(H')$ est un sous-espace vectoriel de E*
- *En particulier, $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F et $\mathrm{Ker}\, f$ un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 39. *Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$ *et injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Définition 40. *Si $f : E \to F$ est une application linéaire bijective, on dit qu'il s'agit d'un* ***isomorphisme****, et que les espaces vectoriels E et F sont* ***isomorphes****. Si $f : E \to E$ est une application linéaire, on dit qu'il s'agit d'un* ***endomorphisme*** *de E, et si elle est de plus bijective, on dit que f est un* ***automorphisme*** *de E.*

Proposition 41. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective (autrement dit un isomorphisme), alors $f^{-1} : F \to E$ est une application linéaire à son tour, appelée isomorphisme réciproque de f.*

Notation 42. *L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL_{\mathbb{K}}(E)$, et cet ensemble muni de la loi de composition des applications $\circ$ forme un groupe nommé groupe linéaire de E. (Ceci indique que $\circ$ forme une loi de composition interne associative de $GL_{\mathbb{K}}(E)$, qu'il y a un neutre qu'on devine être Id_E et que tout élément de $GL_{\mathbb{K}}(E)$ est symétrisable pour $\circ$. Bien sûr, étant donné $f \in GL_{\mathbb{K}}(E)$, alors le symétrique de f pour $\circ$ n'est autre que f^{-1}.)*

2.1 Applications linéaires et bases

Lemme 43. *Soit $u : E \to F$ et soit $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$, alors $u(\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)) = \mathrm{Vect}(u(x_1), \cdots, u(x_p))$*

Proposition 44. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire et on suppose que $(e_1, \cdots, e_p)$ forme une base de E, alors*

- *u est injective si et seulement si $(u(e_1), \cdots, u(e_p))$ est*
- *u est surjective si et seulement si $(u(e_1), \cdots, u(e_p))$ est*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $(u(e_1), \cdots, u(e_p))$ est*

Théorème 45. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire*

- *Si E est de dimension finie et u est surjective, alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus, en cas d'égalité des dimensions, alors u est un isomorphisme.*
- *Si F est de dimension finie et u est injective, alors E est de dimension finie et $\dim E \leqslant \dim F$. De plus, en cas d'égalité des dimensions, alors u est un isomorphisme.*
- *Si u est un isomorphisme et si E ou F est de dimension finie, alors les deux le sont et $\dim E = \dim F$.*

Corollaire 46. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit u un endomorphisme de E, alors il y a équivalence entre les assertions :*

i. *u est injective*

ii. *u est surjective*

iii. *u est bijective*

Théorème 47. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $(e_1, \cdots, e_p)$, et soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(y_1, \cdots, y_p) \in F^p$, alors il existe une et une seule application linéaire $u : E \to F$ telle que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = y_j$.*

Remarque 48. Le théorème précédent est très important : il sert à la fois à reconnaître une application linéaire, ou montrer que deux applications linéaires sont identiques car elles ont la même action sur une base de E (on cite d'ailleurs souvent ce théorème en indiquant qu'une application linéaire est caractérisée par son action sur une base). Il sert également à construire des applications linéaires : connaissant deux espaces vectoriels E et F, et une base $(e_1, \cdots, e_p)$ du premier, alors pour choisir une application linéaire de E dans F, il suffit de choisir pour chaque élément de la base $(e_1, \cdots, e_p)$ de E un élément de F.

En s'appuyant également sur le résultat précédent, on voit que pour construire un isomorphisme de E dans F, il suffit de choisir une base de E et une base de F (lesquelles devront manifestement compter le même nombre d'éléments) et d'envoyer les vecteurs de la première sur ceux de la seconde.

De ce fait, on voit bien que dès lors que deux espaces vectoriels sont de même dimension finie, alors ils sont isomorphes.

Définition 49. *Etant donnée $u : E \to F$ une application linéaire, E étant supposé de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie au plus égale à $\dim E$. On appelle rang de u et on note $\operatorname{rg} u$ la dimension de $\operatorname{Im} u$.*

Lemme 50. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire, et on suppose que E' est un sous-espace vectoriel supplémentaire à $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u réalise un isomorphisme de E' dans $\operatorname{Im} u$.*

Théorème 51. *(du rang) Soit $u : E \to F$ une application linéaire, E étant supposé de dimension finie, alors $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$*

Exercice 2. Soit $u : E \to F$ une application linéaire, et soit G un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrez que $\dim u(G) \leqslant \dim G$. Quand y a-t-il égalité ?

Proposition 52. *Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.*

Proposition 53. *Soient u et v deux endormophismes d'un même espace vectoriel E et on suppose que $u \circ v = v \circ u$, alors l'image et le noyau de u sont stables par v.*

Proposition 54. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et soit $u : F \to G$ un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(u \circ f) = \operatorname{rg} f$*

De même, si $u : G \to E$ est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(f \circ u) = \operatorname{rg} f$.

2.2 Projecteurs, symétries, homothéties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 55. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.*

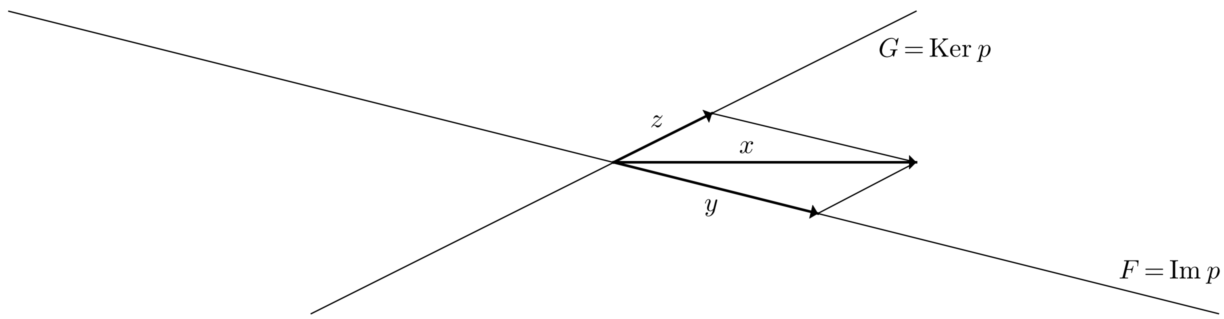
*On appelle **symétrie** de E tout endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.*

*On appelle **homothétie** de E de rapport λ l'application $\lambda \cdot \mathrm{Id}_E$.*

Proposition 56. *Soit p un projecteur de E, alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et, de plus, étant donnés $x \in E$, $(y, z) \in \operatorname{Im} p \times \operatorname{Ker} p$ tels que $x = y + z$, alors $y = p(x)$.*

*On dit de $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ qu'ils sont les **espaces caractéristiques** de p, et on remarque que $\operatorname{Im} p = \{x \in E | p(x) = x\}$.*

Proposition 57. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, alors pour tout $x \in E$, il existe $(y, z) \in F \times G$ unique tel que $x = y + z$. Cela permet de définir l'application p qui à $x \in E$ associe sa composante (ici notée y) selon F de cette unique décomposition. p est alors un projecteur, d'image F (qu'on peut nommer **support** de p) et de noyau G (qu'on nomme **direction** de p)*



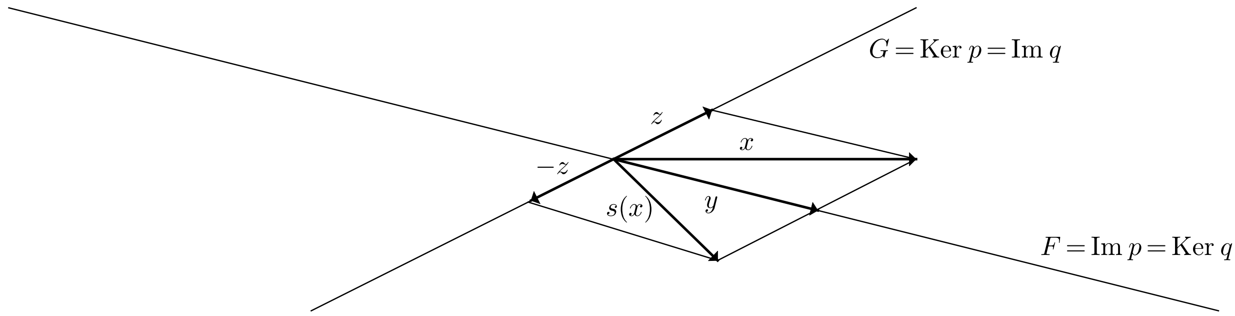
Définition 58. *Soit p un projecteur de E, alors on appelle **projecteur associé** à p l'endormorphisme $q = \mathrm{Id}_E - p$. q est alors le projecteur de E de support $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p$ et de direction $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$.*

Bien entendu, de deux projecteurs p et q de E, on note qu'ils sont associés si et seulement si $p + q = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 59. *Soit s une symétrie de E, alors il existe (p, q) un unique couple de projecteurs associés tels que $s = p - q$.*

On dit de l'espace $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$ *qu'il est l'**axe** de* s *et de l'espace* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$ *qu'il en est **la direction**, les deux formant les **espaces caractéristiques** de* s.

Proposition 60. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* F, G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E*, alors l'application qui à* $x \in E$ *associe* $y - z$ *où* $(y, z) \in F \times G$ *tel que* $x = y + z$ *est une symétrie de* E*, la symétrie d'axe* F *et de direction* G.



A retenir : pour une symétrie s de E, les espaces caractéristiques s'obtiennent donc ainsi : l'axe F est l'ensemble des vecteurs invariants $F = \{x \in E | s(x) = x\}$ (comme le support d'un projecteur, mais contrairement à un projecteur, il ne s'agit pas de l'image de s, car $\operatorname{Im} s = E$!) et la direction G est l'ensemble des vecteurs x tels que $s(x) = -x$.

2.3 Formes linéaires, hyperplans

Définition 61. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*, alors on appelle **forme linéaire** de* E *toute application linéaire* φ *de* E *dans* $\mathbb{K}$.

*On appelle **hyperplan** de* E *tout sous-espace vectoriel de* E *de dimension* $n - 1$.

Théorème 62. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $F \subset E$*, alors* F *est un hyperplan de* E *si et seulement si il existe* φ *une forme linéaire non nulle de* E *dont* F *est le noyau.*

Théorème 63. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$*, et soit* $F \subset E$*, alors* F *est un hyperplan de* E *si et seulement si il existe* $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$ *tel que pour tout* $x \in E$ *de coordonnées* $(x_1, \cdots, x_n)$*, alors* $x \in F$ *si et seulement si* $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$. *(On pourra parler d'équation hyperplane)*

Proposition 64. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soit* F *un hyperplan de* E*, alors pour tout* $u \in E \setminus F$*,* $E = F \oplus \operatorname{Vect}(u)$.

Remarque 65. Bien entendu, réciproquement, tout sous-espace vectoriel de E qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire est un hyperplan de E.