

# Suites et séries numériques

## 1 Suites de réels et de complexes

### 1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

**Définition 1.** On rappelle qu'étant donnée  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $M \in \mathbb{R}$  est un **majorant** de  $A$  si et seulement si  $\forall x \in A$ ,  $x \leq M$ .  $A$  est dite **majorée** si et seulement si elle admet un majorant.

On introduit de même la notion de minorant et de partie minorée.

Si  $M$  majore  $A$  et est un élément de  $A$ , alors il est forcément unique à avoir ces deux propriétés et on dit que  $M$  est le **plus grand élément** de  $A$  et on peut noter celui-ci  $\max A$ . (Le plus petit élément de  $A$ , s'il existe, serait lui noté  $\min A$  bien sûr)

Enfin, on dit de  $A \subset \mathbb{R}$  qu'elle est **bornée** si, et seulement si, elle est majorée et minorée.

On rappelle qu'étant donnée  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $M \in \mathbb{R}$ , on dit que  $M$  est la **borne supérieure** de  $A$  si et seulement si  $M$  majore  $A$  et, pour tout autre majorant  $M'$  de  $A$ , alors  $M \leq M'$ . (Autrement dit,  $M$  est le plus petit des majorants de  $A$  : à ce titre, il est donc bien unique.)

Si  $A$  admet une borne supérieure, on peut la noter  $\sup A$ .

De même,  $m \in \mathbb{R}$  est la **borne inférieure** de  $A$  si et seulement si  $m$  est le plus grand des minorants de  $A$ . On pourra noter celle-ci  $\inf A$ .

**Proposition 2.** Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ , et  $k \in \mathbb{R}^+$ , alors  $\sup(kA) = k \sup(A)$ .

**Exercice 1.** Que dire de  $B = kA$  si

- $A$  est non vide et majorée et  $k \in \mathbb{R}^-$
- $A$  est non vide et minorée et  $k \in \mathbb{R}^+$
- $A$  est non vide et minorée et  $k \in \mathbb{R}^-$

**Proposition 3.**  $\mathbb{R}$  est un corps totalement ordonné par  $\leq$  et, de plus, toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée admet une borne supérieure. Toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

(En fait, il s'agit d'une équivalence car d'une part, si  $A$  est vide, alors tout réel la majore et la minore et  $A$  n'admet donc pas de plus petit majorant ni de plus grand minorant et d'autre part, si  $A$  n'est pas majorée, elle ne saurait bien sûr admettre une borne supérieure...)

**Définition 4.** (partie entière, approximation décimale d'un réel)

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors il existe un unique entier relatif nommé **partie entière de  $x$**  et noté  $\lfloor x \rfloor$  tel que  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ . Bien sûr, il s'agit de  $\max \{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , l'approximation décimale à  $10^{-n}$  près par défaut de  $x$  est le décimal  $10^{-n} \cdot \lfloor 10^n x \rfloor$ , et l'approximation décimale à  $10^{-n}$  près par excès de  $x$  est le décimal  $10^{-n} \cdot (\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$  (ce qui exprime que  $10^{-n} \cdot \lfloor 10^n x \rfloor \leq x < 10^{-n} \cdot (\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$ )

**Proposition 5.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  est un intervalle si et seulement si pour tous  $x < y$  éléments de  $A$ ,  $[x, y] \subset A$ .

### 1.2 Suites de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$

**Définition 6.** Une suite de  $\mathbb{K}$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{K}$  telle que  $n \mapsto u_n$ . On note  $(u_n)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de terme général  $u_n$ . (Sans les parenthèses, on ne parle pas de la suite, mais donc plutôt de son terme général...)

Une notation alternative qu'on trouve ici ou là est de parler de la suite  $u$  plutôt que de la suite  $(u_n)$ .

**Définition 7.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ , alors elle dite **bornée** si et seulement si il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| \leq M$ .

Si  $(u_n)$  est à valeurs réelles,  $(u_n)$  est dite **majorée** si et seulement si il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$  et  $(u_n)$  est dite **minorée** si et seulement si il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .

**Définition 8.** (et proposition) Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{R}$ , alors  $(u_n)$  est **croissante** si et seulement si pour tous entiers  $n \leq p$ ,  $u_n \leq u_p$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

(On définit de même la notion de suite strictement croissante, décroissante, strictement décroissante...)

**Définition 9.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$  et  $l \in \mathbb{K}$ , alors on dit que  $(u_n)$  **converge** vers  $l$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Soit  $(u_n)$  une suite de réels, alors on dit que  $(u_n)$  **diverge vers**  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > M$$

et on dit que  $(u_n)$  **diverge vers**  $-\infty$  si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < m$$

**Remarque 10.** Au fond les trois définitions ci-dessus se rejoignent en une seule une fois qu'on a compris que dire que  $(u_n)$  tend vers  $l$ , ou a pour limite  $l$ , signifie que pour tout *voisinage* de  $l$ , aussi petit soit-il (aussi près de  $l$  essaie-t-on de se placer) qu'il existe un rang assez grand  $N$  à partir duquel toutes les valeurs de la suite prendront place dans ce voisinage de  $l$ .

Ainsi, un *voisinage* de  $l \in \mathbb{C}$  serait l'ensemble des complexes situés à une distance de  $l$  n'excédant pas un petit réel  $\varepsilon > 0$ . Il s'agit donc de ce qu'on appelle une boule ouverte de centre  $l$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  (on pourrait aussi l'appeler ici un disque). Si  $l \in \mathbb{R}$ , c'est un intervalle ouvert  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$  qu'on peut toujours appeler boule de centre  $l$  et de rayon  $\varepsilon > 0$ .

Pour une limite telle que  $+\infty$ , alors un voisinage de  $+\infty$  prendrait plutôt la forme de  $]M, +\infty[$ .

En pratique, montrer la convergence d'une suite vers  $l$  nous invite à majorer la distance entre le terme général  $u_n$  de celle-ci et de  $l$ , souvent à l'aide de la proposition suivante :

**Proposition 11.** Soient  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ ,  $l \in \mathbb{K}$  et  $(\alpha_n)$  une suite de réels positifs qui converge vers 0. On suppose de plus qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \alpha_n$ , alors  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

**Proposition 12.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites de  $\mathbb{K}$  convergeant respectivement vers  $l$  et  $l'$  et soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , alors  $\lambda \cdot (u_n) + \mu \cdot (v_n)$  converge de limite  $\lambda l + \mu l'$ ,  $(u_n) \times (v_n)$  converge aussi, et ce de limite  $l \times l'$ .

**Proposition 13.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{C}$ , alors  $(u_n)$  converge de limite  $l \in \mathbb{C}$  si et seulement si  $(\operatorname{Re}(u_n))$  converge de limite  $\operatorname{Re}(l)$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  converge de limite  $\operatorname{Im}(l)$ .

**Proposition 14.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$  convergente, alors  $(u_n)$  est bornée.

### 1.3 Sous-suites

**Définition 15.** Etant donnée  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$  et  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante, alors  $(u_{\varphi(n)})$  est à son tour une suite de  $\mathbb{K}$  que l'on dit **extraite** de  $(u_n)$  (ou qu'elle est une **sous-suite** de  $(u_n)$ )

**Lemme 16.** Si  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(n) \geq n$ .

**Proposition 17.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ .

- Si  $(u_n)$  est bornée, alors il en va de même de toute sous-suite de  $(u_n)$
- Si  $(u_n)$  est convergente, de limite  $l \in \mathbb{K}$ , alors toute sous-suite de  $(u_n)$  converge également vers  $l$ .

**Remarque 18.** La réciproque à chacune des deux propriétés précédentes est fausse, et on utilise d'ailleurs souvent la seconde pour contredire la convergence d'une suite : si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ , alors les deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent toutes deux, mais vers les limites respectives 1 et  $-1$ , ce qui prouve que  $(u_n)$  ne saurait converger...

Il est tout de même un cas classique où la convergence de sous-suites conduit à la convergence de la suite initiale :

**Proposition 19.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ . On suppose que  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent toutes deux de même limite  $l$ , alors  $(u_n)$  converge elle aussi vers  $l$ .

## 1.4 Cas des suites réelles

Déjà, on pense au résultat fondamental (qui se déduit de la propriété de la borne supérieure de  $\mathbb{R}$ ) :

**Proposition 20.** (limite monotone) Soit  $(u_n)$  une suite croissante de réels, alors ou bien  $(u_n)$  est majorée et dans ce cas elle converge de limite  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ , ou bien elle diverge vers  $+\infty$ . (A vrai dire, on peut donc remarquer que  $(u_n)$  tend toujours vers  $\sup u_n$ , la borne supérieure étant prise dans la droite numérique achevée  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .)

La question de ce que deviennent des inégalités après un passage à la limite est d'importance !

**Proposition 21.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites de réels convergeant toutes deux et de limites respectives  $l$  et  $l'$ . On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$  (resp.  $\forall n \geq N, u_n < v_n$ ), alors  $l \leq l'$  (resp.  $l < l'$ ).  

**Proposition 22.** (Gendarmes, théorème d'encadrement) Soient  $(u_n), (v_n), (w_n)$  des suites de réels. On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$  et que, de plus,  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent toutes deux et de même limite  $l$ , alors  $(v_n)$  converge elle aussi vers  $l$ .

**Proposition 23.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites de réels. On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$  et on suppose de plus que  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors  $(v_n)$  diverge également vers  $+\infty$ .

**Définition 24.** De deux suites de réels  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si de plus  $u_n - v_n \rightarrow 0$  alors on dit qu'elles sont **adjacentes**.

**Théorème 25.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de réels adjacentes (on précise  $(u_n)$  croissante et  $(v_n)$  décroissante), alors  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent de même limite  $l \in \mathbb{R}$  et, de plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq l \leq v_n$ .

**Remarque 26.** Si deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont tous les attributs d'un couple de suites adjacentes, à ceci près qu'elles ne sont monotones qu'à partir d'un certain rang  $N$ , on dit encore qu'elles sont adjacentes, mais bien entendu les inégalités encadrant la limite commune de ces deux suites ne sont établies qu'à partir de ce rang  $N$ .

## 1.5 Relations de comparaison

**Définition 27.** Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ,  $(v_n)$  ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors on dit que

- $(u_n)$  est négligeable par rapport à  $(v_n)$  si et seulement si  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et on notera alors  $u_n = o(v_n)$
- $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$  si et seulement si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée et on notera alors  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$
- $(u_n)$  est équivalente à  $(v_n)$  si et seulement si  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et on notera alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .

## 2 Séries numériques

**Définition 28.** A une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on associe la **série de terme général**  $u_n$ , notée  $\sum u_n$ .

Sa **somme partielle d'ordre  $n$**  est le scalaire  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Elle est dite **convergente** si et seulement si la suite de ses sommes partielles  $(S_n)$  est une suite convergente. Dans le cas contraire, elle est bien sûr dite **divergente**.

Lorsque  $\sum u_n$  converge, on appelle **somme** de la série  $\sum u_n$  la limite de la suite  $(S_n)$  de ses sommes partielles, et on peut noter  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  cette limite.

Enfin, en cas de convergence, on appelle **reste d'ordre  $n$**  la valeur de  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  et qu'on note souvent  $R_n$ .

**Proposition 29.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ , alors la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge. De plus, si  $(u_n)$  converge de limite  $l$ , alors la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  a pour somme  $l - u_0$ .

**Proposition 30.** (et définition) Soit  $\sum u_n$  une série convergente, alors  $(u_n)$  converge vers 0.

D'une série numérique dont le terme général ne converge pas vers 0, on dit qu'elle **diverge grossièrement**.

**Remarque 31.** ATTENTION ! La convergence de  $(u_n)$  vers 0 est une condition NECESSAIRE à ce que la série  $\sum u_n$  converge. Elle n'est en aucun cas suffisante ! Nous reverrons bientôt l'exemple de la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  dont on sait qu'elle diverge tandis que son terme général converge vers 0.

**Proposition 32.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes, de sommes respectives  $s$  et  $s'$  et soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , alors la série  $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  est convergente, de somme  $\lambda s + \mu s'$ .

**Proposition 33.** (séries géométriques) On suppose que  $(u_n)$  est une suite géométrique, non identiquement nulle, et de raison  $\rho$ , alors  $\sum u_n$  converge si, et seulement si  $|\rho| < 1$  et, le cas échéant, sa somme vaut  $\frac{u_0}{1-\rho}$ .

## 2.1 Cas des séries à termes positifs

**Proposition 34.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{R}^+$ , alors la série  $\sum u_n$  est convergente si, et seulement si, sa suite des sommes partielles  $(S_n)$  est majorée.

**Proposition 35.** Soient  $(u_n), (v_n)$  des suites de  $\mathbb{R}^+$ . On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$  et que  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge à son tour.

De plus, sous l'hypothèse où  $\sum v_n$  converge, et en notant, pour tout  $n$ ,  $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  et  $R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ , alors pour tout  $n \geq N$ ,  $R_n(u) \leq R_n(v)$ .

**Proposition 36.** Soient  $(u_n), (v_n)$  des suites de  $\mathbb{R}^+$ ,  $(v_n)$  ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

- On suppose que  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  et que  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge également.
- On suppose que  $u_n \sim v_n$ , alors  $\sum u_n$  converge si, et seulement si  $\sum v_n$  converge.

## 2.2 Comparaison série-intégrale

**Lemme 37.** Soit  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et décroissante alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

**Remarque 38.** Si  $f$  n'est pas définie en 0, on peut sommer à partir de 1 bien sûr.

**Corollaire 39.** (Séries de Riemann) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente si, et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Exercice 2.** Soit  $\alpha > 1$ , donnez un équivalent de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

## 2.3 Séries absolument convergentes

**Définition 40.** Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ , on dira de la série  $\sum u_n$  qu'elle est **absolument convergente** si, et seulement si, la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

On s'en doute, l'absolue-convergence est une propriété plus forte que la convergence seule :

**Théorème 41.** Si  $\sum u_n$  est absolument convergente, alors elle est convergente.

On peut reprendre certains théorèmes de comparaison à la lumière des séries absolument convergentes :

**Proposition 42.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$  et  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ . Si de plus  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge absolument.

En particulier : si  $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  où  $\alpha > 1$ , alors  $\sum u_n$  est absolument convergente.

## 2.4 Règle de d'Alembert

**Proposition 43.** Soit  $(u_n)$  une suite de complexes ne s'annulant pas. On suppose que  $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$  a pour limite  $l \in [0, +\infty]$ .

- Si  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge absolument
- Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement
- Si  $l = 1$  alors... on ne peut rien conclure ! (Prendre par exemple  $u_n = n$  puis  $u_n = \frac{1}{n^2}$ )

**Remarque 44.** Si  $\sum u_n$  est géométrique, merci de citer directement le résultat connu sur la convergence/divergence des séries géométriques, et non la règle de d'Alembert !

**Exemple 45.** Soit  $\rho \in \mathbb{C}^*$ , montrons la convergence de  $\sum \frac{\rho^n}{n!}$  : on observe que, en notant pour tout  $n$ ,  $u_n = \frac{\rho^n}{n!}$ ,  $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|\rho|}{n+1} \longrightarrow 0$  et donc, d'après la règle de d'Alembert,  $\sum \frac{\rho^n}{n!}$  converge absolument.

## 2.5 Formule de Stirling

**Proposition 46.** (formule de Stirling)  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ .

On va montrer cet équivalent grâce aux deux exercices qui suivent :

**Exercice 3.** Soit  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = \frac{n!}{n^n} e^n$  et  $w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que  $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .
2. En déduire que la série de terme général  $\ln w_{n+1} - \ln w_n$  est convergente.
3. En déduire l'existence d'un réel  $K$  strictement positif tel que  $n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ .

**Exercice 4.** (Intégrales de Wallis) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$ .

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Lorsque  $n \geq 2$ , donner une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-2}$ . En déduire que  $(n I_n I_{n-1})$  est une suite constante, et calculer une expression de  $I_{2n}$ .
3. Montrer que  $(I_n)$  est monotone, et justifier que  $I_n \sim I_{n-1}$ .
4. En déduire un équivalent simple de  $I_n$ .
5. En reprenant l'exercice précédent, déterminer la valeur de  $K$ .

## 2.6 Critère spécial des séries alternées

**Théorème 47.** Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle, alors la série dite **alternée**  $\sum (-1)^n u_n$  converge. De plus, en notant  $(S_n)$  la suite de ses sommes partielles et  $l$  sa somme, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{2n+1} \leq l \leq S_{2n}$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$  est du signe de son premier terme  $(-1)^{n+1}$  et de plus  $|R_n| \leq u_{n+1}$ .

**Exemple 48.** La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  a toutes les propriétés requises (à ceci près que l'on somme à partir du rang 1 ce qui on s'en doute ne change rien) et est donc, d'après le critère spécial des séries alternées, convergente. En revanche, elle n'est pas absolument convergente.

**Exercice 5.** Soit  $x \geq 0$  un réel. Montrer que le reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$  est le terme général d'une série convergente.

## 2.7 Produit de Cauchy de deux séries

Nous avons vu qu'une combinaison linéaire de séries convergente est une série convergente, de somme la combinaison linéaire des sommes. Nous n'avons rien énoncé concernant le produit de deux termes généraux de séries convergentes, car d'une part rien ne permet de prouver la convergence de  $\sum (u_n v_n)$  sous l'hypothèse que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent et, d'autre part, même en cas de convergence de  $\sum (u_n v_n)$ , on ne sait rien dire de pertinent de la somme correspondante, vis-à-vis des sommes des deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

En effet, si la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées, il n'en va pas de même de  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2$  qui diverge (on reconnaît la série harmonique)...

Mais si on s'imagine plutôt faire le produit des sommes infinies  $(u_0 + u_1 + \dots) \times (v_0 + v_1 + \dots)$  il est un regroupement assez naturel des termes obtenus par ce développement :

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$$

C'est l'idée derrière le produit de Cauchy :

**Définition 49.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries de  $\mathbb{K}$ . On appelle **produit de Cauchy** de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  la série  $\sum w_n$  où, pour tout  $n$ ,  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

**Théorème 50.** On suppose  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries absolument convergentes de  $\mathbb{K}$ , alors leur produit de Cauchy  $\sum w_n$  converge absolument également et  $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) \times (\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$