

1 Révision d'analyse :

Suites de réels. Convergence, limite. Séries de termes positifs. Comparaison série-intégrale.

Séries absolument convergentes, critère de Riemann. Règle de d'Alembert.

Séries alternées, produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

- Critère spécial des séries alternées (énoncé et, bien sûr, démonstration)
- Exercice type : Césaro (voir au dos pour une rédaction possible)

2 Révisions d'algèbre

Espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel. Espace vectoriel engendré par une partie, par une famille. Famille libre, famille génératrice. Espaces de dimension finie et bases. Sommes de sous-espaces. Espaces en somme directe (2 et plus), espaces supplémentaires et caractérisations.

Applications linéaires. Image directe et réciproque d'un espace vectoriel, image et noyau et lien avec l'injectivité et la surjectivité. Hyperplans.

Matrices, structure, interprétation matricielle d'une application, matrices carrées, inversibles, matrices de passage et formules de changement de base. Image, noyau et rang d'une matrice. Matrices définies par blocs.

Déterminants : déterminant d'une famille de vecteurs selon une base, d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, déterminant par blocs, déterminant de Vandermonde.

Polynômes : degré d'un polynôme, degrés étagés, racines simples et multiples, relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé (somme et produit des racines seulement), polynômes irréductibles, cas des polynômes réels et complexes.

Questions de cours :

- Proposition 11 : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux espaces supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$
- Rappel de la définition de $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et théorème 17 (formule de changement de base pour un vecteur)
- Déterminant de Vandermonde

Exercice. Sommes de Césaro : soit (u_n) une suite convergente de limite l , et on pose pour tout n , $v_n = \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1}$. Montrer que (v_n) converge vers l .

Solution. On traite d'abord le cas où $l=0$: on suppose donc que (u_n) converge vers 0, et soit $\varepsilon > 0$, alors comme (u_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geq N$,

$$|v_n| = \frac{|u_0 + \dots + u_n|}{n+1} \leq \frac{|u_0| + \dots + |u_n|}{n+1} \leq \frac{|u_0| + \dots + |u_N|}{n+1} + (n-N) \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \frac{|u_0| + \dots + |u_N|}{n+1} + \varepsilon$$

de plus $\frac{|u_0| + \dots + |u_N|}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', \frac{|u_0| + \dots + |u_N|}{n+1} < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N')$, $|v_n| \leq 2\varepsilon$ et ceci montre que (v_n) converge vers 0.

Traisons maintenant le cas général : on suppose désormais que (u_n) converge vers l , alors

$$v_n - l = \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1} - l = \frac{u_0 - l + \dots + u_n - l}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

car la suite $(u_n - l)$ converge vers 0, étant alors ramené au cas précédent.