1 Révision d'analyse :

On peut encore poser des exercices sur des séries numériques.

2 Révisions d'algèbre

Espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel. Espace vectoriel engendré par une partie, par une famille. Famille libre, famille génératrice. Espaces de dimension finie et bases. Sommes de sous-espaces. Espaces en somme directe (2 et plus), espaces supplémentaires et caractérisations.

Applications linéaires. Image directe et réciproque d'un espace vectoriel, image et noyau et lien avec l'injectivité et la surjectivité. Hyperplans.

Matrices, structure, interprétation matricielle d'une application, matrices carrées, inversibles, matrices de passage et formules de changement de base. Image, noyau et rang d'une matrice. Matrices définies par blocs.

Déterminants : déterminant d'une famille de vecteurs selon une base, d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, déterminant par blocs, déterminant de Vandermonde.

Polynômes : degré d'un polynôme, degrés étagés, racines simples et multiples, relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé (somme et produit des racines seulement), polynômes irréductibles, cas des polynômes réels et complexes.

Polynômes interpolateurs de Lagrange, formule du binôme et application au calcul des polynômes de Tchebychev.

Questions de cours :

- Énoncé des formules donnant, pour $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ un polynôme scindé de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non supposées 2 à 2 distinctes) les expressions de $\sum \lambda_k$ et $\prod \lambda_k$ en fonction des coefficients du polynôme P .
- Étant donné $(a_0, \dots, a_n)$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, explicitation des polynômes $L_0, \dots, L_n$ tels que pour tout (i, j) , $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ et expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_k, b_k) à l'aide des L_k . (Voir au verso si nécessaire pour ce dernier point)

3 Réduction

Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme. Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Théorème de Cayley-Hamilton, caractérisation des endomorphismes diagonalisables par l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Trigonalisation, caractérisation par le polynôme caractéristique, méthode pratique pour des matrices 2×2 et 3×3 .

Questions de cours :

- Si u et v commutent, alors les espaces propres de u sont stables par v .
- Si P annule u et λ est une valeur propre de u , alors λ est une racine de P . (P.24)
- Exercice-type : (exo 4 du cours) si u et v sont deux endomorphismes diagonalisables et qui commutent de E de dimension finie, alors ils sont simultanément diagonalisables.

Remarque 1. Expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux (a_k, b_k) : vu les valeurs prises par les polynômes $L_0, \dots, L_n$, alors le polynôme $b_0 L_0 + \dots + b_n L_n$ prend pour valeur, en a_k pour $0 \leq k \leq n$, b_k .

De plus, $d(b_0 L_0 + \dots + b_n L_n) \leq n$ et ainsi on a reconnu, sous la forme de $b_0 L_0 + \dots + b_n L_n$, le polynôme interpolateur de Lagrange en les (a_k, b_k) .