Exercice 1.

On fait un développement asymptotique :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

duquel on déduit sans peine que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est divergente.

1. C'est une ânerie bien sûr, on connaît l'exemple de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge. Rappelons seulement que si (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge, et on peut préciser : « grossièrement ».

2. C'est, tel quel, une bêtise, car il faut préciser que (u_n) et (v_n) sont à termes positifs (ou du moins de signe constant).

   Un contre-exemple classique est donné par les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. La première des deux séries converge en vertu du critère spécial des séries alternées, mais un développement asymptotiqe établit que la seconde diverge. Et pourtant...

3. C'est vrai, et on peut préciser, le cas échéant, en notant l la limite de la suite (u_n), que la somme de la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ est $l-u_0$.

4. C'est faux, comme le montre l'exemple de $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. L'énoncé correct serait : si $\sum u_n$ est une série de réels positifs qui converge et si $v_n=o(u_n)$, alors $\sum v_n$ converge ce qui par la contraposée donnerait : si $\sum u_n$ est une série de réels positifs et si $\frac{1}{n}=o(u_n)$, alors, comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum u_n$ diverge à son tour.

5. C'est faut, comme le montre l'exemple de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 2.

1. On montre que pour tout n, $y_0,\ldots,y_n$ sont bien définis et à valeurs positives.

   Pas de souci pour l'initialisation de la récurrence. Soit n, supposons construits $y_0,\ldots,y_n$ positifs, alors $1+x_{n+1}\,y_n>0$ et il vient donc $y_{n+1}=\frac{x_{n+1}+y_n}{1+x_{n+1}\,y_n}$ bien défini et positif ce qui achève la récurrence.

2. a. La dérivabilité de f_y sur $[0,1]$ ne fait aucun doute et, après simplification, il vient $\forall x\in[0,1]$, $f_y'(x)=\frac{1-y^2}{(1+x\,y)^2}\geqslant 0$ et ainsi f_y est croissante sur $[0,1]$ (le plus souvent strictement croissante bien sûr, sauf lorsque $y=1$.)

   Comme de plus $f_y(0)=y$ et $f_y(1)=1$, alors $\forall x\in[0,1]$, $f_y(x)\in[y,1]$.

   b. On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $y_n=f_{y_{n-1}}(x_n)$ et ainsi $y_n\in[y_{n-1},1]$. Ceci assure que la suite (y_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge donc de limite a telle que $y_0\leqslant a\leqslant 1$.

3. a. A partir de l'expression de y_n selon x_n et y_{n-1} il vient que, si $n\in\mathbb{N}^*$: $x_n\,(1-y_n\,y_{n-1})=y_n-y_{n-1}$. Comme (y_n) converge vers $a<1$ et est croissante, alors pour tout n, $0\leqslant y_n<1$ ce qui assure que $1-y_n\,y_{n-1}\neq 0$. Comme (x_n) ne s'annule pas, alors y_n-y_{n-1} non plus et on peut donc écrire : Ainsi $\frac{x_n}{y_n-y_{n-1}}=\frac{1}{1-y_n\,y_{n-1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{1-a^2}$ ce qui montre bien l'équivalent attendu.

   b. Mais alors les séries $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1-a^2}(y_n-y_{n-1})$ sont deux séries à termes positifs et dont les termes généraux sont équivalents. Elles ont donc la même nature, or la seconde est manifestement convergente sa somme partielle $s_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{1-a^2}(y_k-y_{k-1})=\frac{1}{1-a^2}(y_n-y_0)$ (somme télescopique) forme une suite convergente (et de limite $\frac{a}{1-a^2}$), ainsi $\sum x_n$ converge également.

4. a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$z_n \;=\; \frac{1+y_n}{1-y_n}=\frac{1+\frac{x_n+y_{n-1}}{1+x_n\,y_{n-1}}}{1-\frac{x_n+y_{n-1}}{1+x_n\,y_{n-1}}}=\frac{1+x_n\,y_{n-1}+x_n+y_{n-1}}{1+x_n\,y_{n-1}-x_n-y_{n-1}}=\frac{(1+x_n)\,(1+y_{n-1})}{(1-x_n)\,(1-y_{n-1})}=h(x_n)\,z_{n-1}$$

   b. S'établit aisément par récurrence en remarquant que $h(x_n)=\frac{1+x_n}{1-x_n}=1+\frac{2\,x_k}{1-x_k}$.

5. a. i. Par hypothèse, $\sum x_n$ est convergente, et ainsi (x_n) converge vers 0. Mais alors

$$\ln\left(1+\frac{2\,x_n}{1-x_n}\right)=\frac{2\,x_n}{1-x_n}+o\left(\frac{2\,x_n}{1-x_n}\right)\sim\frac{2\,x_n}{1-x_n}\sim 2\,x_n$$

a. ii. et iii. On a pour tout k, $1+\frac{2\,x_k}{1-x_k}>0$ et $z_0=h(0)=1$ donc pour tout n, $z_n>0$ ce qui montre que la suite $(\ln z_n)$ est bien définie.

Mais alors les séries $\sum \ln\left(1+\frac{2\,x_n}{1-x_n}\right)$ et $\sum 2\,x_n$ ont la même nature, puisqu'il s'agit de séries à termes positifs et de termes généraux équivalents. Or $\sum 2\,x_n$ converge, donc $\sum \ln\left(1+\frac{2\,x_n}{1-x_n}\right)$ est également convergente.

En remarquant que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln z_n=\ln z_0+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2\,x_k}{1-x_k}\right)$, alors la suite $(\ln z_n)$ est convergente, mais il en va alors de même de la suite $(z_n)=(\exp(\ln(z_n)))$.

b. i. On remarque que (z_n) est une suite de réels tous supérieurs à 1, donc si la suite (z_n) converge, par continuité de ln sur $[1,+\infty[$, $(\ln z_n)$ converge également (et bien sûr il n'y a aucun doute sur son existence)

b. ii. $(\ln z_n-\ln z_{n-1})$ converge alors vers 0, ce qui montre le résultat attendu.

b. iii. Notons $\alpha_n=1+\frac{2\,x_n}{1-x_n}$. D'après ce qui précède, alors (α_n) converge vers $\exp(0)=1$.

Mais il vient $x_n=\frac{\alpha_n-1}{\alpha_n+1}$, et ainsi (x_n) converge vers 0.

b. iv. On procède alors comme ci-dessus pour remarquer que les séries $\sum 2\,x_n$ et $\sum \ln\left(1+\frac{2\,x_n}{1-x_n}\right)$ ont la même nature (séries de termes positifs et de termes généraux équivalents) et comme la seconde converge, la première aussi... Bien sûr alors $\sum x_n$ converge également.

6. On suppose donc $\sum x_n$ convergente. Alors (z_n) converge. La suite (y_n) ne saurait alors converger vers 1 car sinon $(h(y_n))=(z_n)$ diverge vers $+\infty$... Ainsi $a<1$.

Exercice 3.

1. On reconnaît que $F=\mathrm{Vect}(I_3,N)$, par ailleurs la liberté de (I_3,N) ne fait aucun doute et ainsi F est un espace vectoriel de dimension 2, et admettant pour base (I_3,N).

2. Le calcul donne $N^2=2\,I_3+N$

3. On se donne deux éléments de F sous la forme de $M(a,b)$ et $M(a',b')$, et on calcule

$$M(a,b)\times M(a',b')=(a\,I_3+b)\times(a'\,I_3+b'\,N)=(a\,a'+2\,b\,b')I_3+(a\,b'+a'\,b)\,N\in F$$

4. De la relation $N^2-N=2\,I_3$ on déduit que N est inversible, d'inverse $\frac{1}{2}\,(N-I_3)\in F$.

5. On connaît le polynôme annulateur X^2-X-2 de N, lequel est scindé à racines simples -1 et 2. Ceci montre que N est diagonalisable.

6. $N+I_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ dont le noyau est $E_{-1}(N)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$N-2\,I_3=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$. En notant C_1,C_2,C_3 les vecteurs colonnes de $N-2\,I_3$, alors (C_1,C_2) est libre mais $C_1+C_2+C_3=0$ et ainsi $\mathrm{Ker}(N-2I_3)=E_2(N)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

On a trouvé une base de diagonalisation de N (-1 est une valeur propre double, et 2 est simple) et on sait qu'en posant $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ et $D=\mathrm{diag}(-1,-1,2)$, alors on a bien $N=P\,D\,P^{-1}$.

7. La stabilité de F par le produit matriciel assure sans peine que pour tout n, $N^n\in F$ et comme (I_3,N) est une base de F il existe donc bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$ unique tel que $N^n=a_n\,I_3+b_n\,N$.

De plus, étant donné $n\in\mathbb{N}$, alors comme $N^n=a_n\,I_3+b_n\,N$, on a donc $N^{n+1}=(a_n\,I_3+b_n\,N)\,N=2\,b_n\,I_3+(a_n+b_n)\,N$ et ainsi $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.

8. $\chi_A(X)=X^2-X-2$ (tiens, tiens...) de racines simples -1 et 2 et ainsi A est dès lors diagonalisable.

De plus $A+I_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et clairement $(A+I_2)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puis $A-2\,I_2=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $(A-2\,I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc en posant $Q=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $A=Q\,B\,Q^{-1}$.

9. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=Q\,B^n\,Q^{-1}$ (récurrence facile), c'est-à-dire :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ 2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\,(-1)^n+2^n & 2\,(-1)^{n+1}+2^{n+1} \\ (-1)^{n+1}+2^n & (-1)^n+2^{n+1} \end{pmatrix}$$

10. On a $(a_0,b_0)=(1,0)$ et ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\,(-1)^n+2^n \\ (-1)^{n+1}+2^n \end{pmatrix}$ et donc $N^n=\frac{1}{3}\,(2\,(-1)^n+2^n)\,I_3+\frac{1}{3}\,((-1)^{n+1}+2^n)\,N$

11.

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \xlongequal[L_2\leftarrow L_2-L_1, L_3\leftarrow L_3-L_1]{} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \end{vmatrix} \xlongequal[C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3]{} \begin{vmatrix} a+2\,b & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

et ainsi $\det(M(a,b))=(a+2\,b)\,(a-b)^2$. On en déduit que $M(a,b)$ est inversible si, et seulement si, $a+2\,b\neq 0$ et $a\neq b$.

12. Supposons que $A\in M_n(\mathbb{K})$ soit inversible, alors son polynôme caractéristique χ_A est de terme constant (on rappelle qu'il vaut $(-1)^n\det(A)$) non nul, mais aussi, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A)=0$. On obtient ainsi une relation de la forme :

$$A\,(A^{n-1}-\det(A)\,A^{n-2}+\cdots+a_1\,I_n)=(-1)^{n+1}\det(A)$$

et on voit bien apparaître que A^{-1} est de la forme $P(A)$ où P est un polynôme de degré $n-1$ (de coefficient dominant $\frac{1}{(-1)^{n+1}\det(A)}$)

Comme F est stable par la multiplication matricielle, il ne fait alors aucun doute que si $M(a,b)$ est inversible, son inverse est alors encore dans F.

Problème 1. Partie I

1. Pour tout $X\in\mathbb{R}$, par un développement selon la première colonne $\chi_A(X)=\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}=X\,(X^2-2)+2\,(-X)=X^3-4\,X=X\,(X-2)\,(X+2)$.

2. χ_A est ainsi scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable. Ses valeurs propres sont $-2,0,2$ et chacun des espaces propres correspondants est une droite vectorielle.

3. Pour tout $X\in\mathbb{R}$, $\chi_B(X)=\begin{pmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix}=X\,(X^2+2)+2\,X=X^3+4\,X=X\,(X^2+4)=X\,(X-2\,\mathrm{i})\,(X+2\,\mathrm{i})$ et on note que pour tout X (réel ou complexe, peu importe) $\mathrm{i}\,\chi_B(\mathrm{i}\,X)=-X\,(\mathrm{i}\,X-2\,\mathrm{i})\,(\mathrm{i}\,X+2\,\mathrm{i})=X\,(X^2-4)=\chi_A(X)$.

4. χ_B n'étant pas scindé sur $\mathbb{R}$, B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. En revanche, χ_B est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. 0 est la seule valeur propre réelle de B (simple, et donc son espace propre associé ne peut être qu'une droite vectorielle) et les valeurs propres complexes sont 0, $-2\,\mathrm{i}$ et $2\,\mathrm{i}$, toutes trois simples et donc d'espaces propres associés de dimension 1.

5. Le calcul montre que $D^{-1}\,A\,D=-\mathrm{i}\,B$.

Partie II

1. Soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$, on suppose $\lambda_0\cdot f_0+\cdots+\lambda_n\cdot f_n=0$, alors pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, en notant $g(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\sin^n(x)\,(\lambda_0\,g^0(x)+\cdots+\lambda_n\,g^n(x)\,)=0$$

Or $\sin^n(x)\neq 0$ et, en d'autres termes, le polynôme $\lambda_0+\lambda_1 X+\cdots+\lambda_n X^n$ admet pour racines tous les réels $g(x)$ pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Une étude rapide de la fonction g (qu'on appelle aussi cotangente) montre que les valeurs atteintes par g sur cet intervalle constituent $\mathbb{R}^{+*}$ et ce polynôme $\lambda_0+\lambda_1 X+\cdots+\lambda_n X^n$ admet alors une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

(autre approche : la valeur en 0 établit que $\lambda_n=0$, puis on factorise par sin et on simplifie, et la limite en 0 de la fonction obtenue donne $\lambda_{n-1}=0$ et ainsi, de proche en proche, on montre que $\lambda_0=\cdots=\lambda_n=0$.)

2. La linéarité de $\delta: f\mapsto f'$ (définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$) ne fait aucun doute et il vient :

   $f_0'=x\mapsto n\cos(x)\sin^{n-1}(x)=n\,f_1$,

   pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, $f_k'=x\mapsto -k\cos^{k-1}(x)\sin^{n-(k-1)}(x)+(n-k)\cos^{k+1}(x)\sin^{n-(k+1)}(x)=-k\,f_{k-1}+(n-k)\,f_{k+1}$ et enfin $f_n'=-n\,f_{n-1}$. Mais alors, par linéarité, $\delta(V_n)\subset V_n$ ce qui montre que δ induit un endomorphisme de V_n (noté φ_n par l'énoncé) et d'après les calculs précédents, la matrice de φ_n selon $(f_0,\cdots,f_n)$ est bien la matrice B_n qu'indique l'énoncé.

3. C'est immédiat en remarquant que $g_k(x)=e^{\mathrm{i}kx}\,e^{-\mathrm{i}(n-k)x}$.

4. Etant donné $x\in\mathbb{R}$, on observe que $(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^k=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\cos^l(x)\sin^{k-l}(x)$ et on développe de même $(\cos x-\mathrm{i}\sin x)^{n-k}$. On en déduit que g_k est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\cos^a\times\sin^b$ où $a+b=k+n-k=n$. En d'autres termes, g_k est une combinaison linéaire des fonctions $f_0,f_1,\cdots,f_n$ autrement dit un élément de V_n.

5. Soit $k\in[\![0,n]\!]$, $g_k'=\mathrm{i}\,(2\,k-n)\,g_k$ ce qui montre que $\mathrm{i}\,(2\,k-n)$ est une valeur propre de φ_n et que g_k en est un vecteur propre associé. On obtient ainsi $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, ce qui montre la diagonalisabilité de φ_n et on a également obtenu une base de diagonalisation sous la forme de $(g_0,\cdots,g_n)$.

6. φ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de φ_n si et seulement si pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\mathrm{i}\,(2\,k-n)\neq 0$ si et seulement si n est impair.

7. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g_n(x)=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k(x)\,(\mathrm{i}\sin x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{i}^{n-k}\binom{n}{k}f_k(x)$ et on a vu que l'espace propre de φ_n associé à $\mathrm{i}\,n$ est $\mathrm{Vect}(g_n)$. Vectoriellement, ceci exprime alors aussi que l'espace propre de la matrice B_n associé à la valeur propre $\mathrm{i}\,n$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}$ avec les notations de l'énoncé.

Partie III

1. On observe que la matrice $D\,M$ est la matrice obtenue à partir de M et des opérations élémentaires $L_k\leftarrow d_{k,k}\,L_k$ pour $1\leqslant k\leqslant p$ et la matrice $M\,D$ est la matrice obtenue à partir de M et des opérations élémentaires $C_l\leftarrow d_{k,k}\,C_l$ pour $1\leqslant l\leqslant p$.

   En d'autres termes, la matrice $D\,M$ a pour terme général $d_{k,k}\,m_{k,l}$ et la matrice $M\,D$ a pour terme général $d_{l,l}\,m_{k,l}$.

2. On remarque que D_n^{-1} est la matrice diagonale dont le terme situé à la k-ième ligne et colonne vaut $(-\mathrm{i})^{k-1}$ puisque $\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$. Ainsi, pour passer de A_n à $D_n^{-1}\,A_n\,D_n$, on effectue les opérations $L_k\leftarrow(-\mathrm{i})^{k-1}\,L_k$ pour $1\leqslant k\leqslant n+1$ et les opérations $C_l\leftarrow\mathrm{i}^{k-1}\,C_l$ pour $1\leqslant l\leqslant n+1$. L'ordre n'a pas d'importance car la multiplication matricielle est associative, et ainsi $D_n^{-1}\,A_n\,D_n=(D_n^{-1}\,A_n)\,D_n=D_n^{-1}\,(A_n\,D_n)$. Là où A_n a un coefficient nul, on retrouve un coefficient nul dans le produit $D_n^{-1}\,A_n\,D_n$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$, le coefficient de ligne k et colonne $k+1$ de $D_n^{-1}\,A_n\,D_n$ est celui de A_n multiplié par $(-\mathrm{i})^{k-1}\times\mathrm{i}^k=\mathrm{i}$ et le coefficient de ligne $k+1$ et colonne k de $D_n^{-1}\,A_n\,D_n$ est celui de A_n multiplié par $(-\mathrm{i})^k\times\mathrm{i}^{k-1}=-\mathrm{i}$. Cela permet de justifier que $D_n^{-1}\,A_n\,D_n=-\mathrm{i}\,B_n$.

   On a alors, pour tout X (réel ou complexe) $\chi_{B_n}(\mathrm{i}\,X)=\det(\mathrm{i}\,X-B_n)=\mathrm{i}^{n+1}\det(X+\mathrm{i}\,B_n)=\mathrm{i}^{n+1}\,\chi_{-\mathrm{i}B_n}(X)$ mais A_n et $-\mathrm{i}\,B_n$ sont semblables et ont donc le même polynôme caractéristique, et ainsi $\chi_{B_n}(\mathrm{i}\,X)=\mathrm{i}^{n+1}\,\chi_{A_n}(X)$.

3. Comme les valeurs propres de B_n sont, on l'a vu, les imaginaires purs $\mathrm{i}\,(2\,k-n)$ pour $0\leqslant k\leqslant n$, on en déduit que les entiers $2\,k-n$ pour $0\leqslant k\leqslant n$ sont des racines de χ_{A_n}. Au nombre de $n+1$, comme χ_{A_n} est de degré $n+1$, on a ainsi trouvé toutes les racines de χ_{A_n} qui est donc scindé à racines simples, et ce sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que A_n est diagonalisable, de valeurs propres les entiers $2\,k-n$ pour $0\leqslant k\leqslant n$.

   Avec les notations de l'énoncé, $D_n^{-1}\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}^0\,p_0\\ \vdots\\ \mathrm{i}^{-n}\,p_n\end{pmatrix}=\mathrm{i}^{-n}\begin{pmatrix} q_0\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}$ et d'après la partie **II**, $B_n\,D_n^{-1}\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=\mathrm{i}\,n\,D_n^{-1}\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$ et il vient donc $A_n\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=-\mathrm{i}\,D_n\,B_n\,D_n^{-1}\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$ est donc bien un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre n. Comme les espaces propres sont tous de dimension 1, alors on a bien établi l'égalité $\mathrm{Ker}(A_n-n\,I_{n+1})=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$.