

1 Espaces préhilbertiens et euclidiens

Définition d'un produit scalaire, et exemples (produit scalaire canonique ou usuel de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$). Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée à un produit scalaire. Identités de polarisation et du parallélogramme.

Orthogonalité. Pythagore. Projection sur un sous-espace de dimension finie. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Définition d'un espace euclidien, existence de bases orthonormales.

Isométries vectorielles et matrices orthogonales. Etude de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

Endomorphismes autoadjoints, et matrices symétriques. Théorème spectral. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs, matrices symétriques positives, définies positives.

Questions de cours : (oui, on énonce ET on démontre !)

- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Identité de Pythagore et son application (une famille orthogonale formée de vecteurs tous non nuls est libre)
- Projeté orthogonal d'un vecteur x sur F sev de E muni de $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale. (Thm 14)
- Expression du produit scalaire selon une base orthonormale. (P.23)
- Définition d'une isométrie vectorielle de E euclidien (D.28), et sa caractérisation (P.29)
- Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthonormale. (P.30)
- Exercice type (exercice 4 du cours) : Une symétrie est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si il s'agit d'une symétrie orthogonale.

Très bonnes fêtes de fin d'année à toutes et à tous !