Programme de colles mathématiques PC

Semaine 15 du 15/1 au 19/1

1 Espaces préhilbertiens, euclidiens

Définition d'un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel F muni d'une base orthonormale (ou orthogonale). Distance de x à F. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Espace euclidien, expression du produit scalaire selon une base orthonormale. Isométries vectorielles.

Matrices orthogonales et caractérisations. Isométries vectorielles du plan euclidien.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques. Théorème spectral. Matrices symétriques positives et définies positives.

- Expression du produit scalaire selon une base orthonormale. (P.23)
- Définition d'une isométrie vectorielle de E euclidien (D.28), et sa caractérisation (P.29)
- Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est orthonormale. (P.30)
- Exercice type (exercice 4 du cours) : Une symétrie est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si il s'agit d'une symétrie orthogonale.

2 Séries entières

Rayon de convergence d'une série entière. Recherche de rayon de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert. Rayon de convergence de la somme, combinaison linéaire et produit de séries entières.

Continuité de la somme.

Questions de cours :

- Lemme d'Abel (énoncé et démonstration bien sûr) et énoncé de la définition du rayon de convergence.
- Enoncé (sans démonstration) des règles de d'Alembert : celle pour les séries numériques (P43 du chapitre concerné) et celle pour les séries entières.
- Continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (P15+C16)

A suivre : fin du chapitre sur les séries entières, rappels sur les équations différentielles.