Exercice 1. On fait un développement asymptotique :

$$\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\exp\left(n^2\ln\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6\,n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\right)=\exp\left(n^2\left(-\frac{1}{6\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\exp\left(-\frac{1}{6}\right)$$

Exercice 2.

1. a. D'après l'interprétation matricielle d'une application (et sachant qu'on est sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique) : $f_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $f_3=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$.

   b. On voit que (f_0, f_1) est libre et donc de rang 2, et il est également immédiat (se voit sur la deuxième composante, nulle pour f_0 et f_1) que $f_2\notin \mathrm{Vec}(f_0, f_1)$ ce qui indique que (f_0, f_1, f_2) est libre et donc de rang 3.

   Clairement, pour $k\geqslant 2$, $(f_0, \cdots, f_k)$ est alors de rang au moins 3, mais également au plus 3 puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc est de rang 3.

   c. On a déjà vu que (f_0, f_1, f_2) est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ puisque $\dim\mathbb{R}^3=3$.

   On a alors $f_1=u(f_0)$ et $f_2=u(f_1)$. Puis, un petit système au brouillon établit que $f_3=2\,f_2+f_1-2\,f_0$ et ainsi la matrice de u selon (f_0, f_1, f_2) est $\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

   d. On trouve $g_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $g_3=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$.

   On observe que (g_0, g_1, g_2) est libre donc de rang 3, tandis que (g_0) et (g_0, g_1) sont respectivement de rang 1 et 2.

   Ensuite pour $k\geqslant 2$, $(g_0,\ldots,g_k)$ ne peut être que de rang 3.

   (g_0, g_1, g_2) étant une famille libre de E (qui est de dimension 3), alors c'en est une base et on remarque que $g_3=2\,g_2+g_1-2\,g_0$ et la matrice de u selon (g_0, g_1, g_2) est encore $\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

   e. Il vient $h_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $h_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $h_3=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$.

   On a alors manifestement (h_0,h_1) libre, tandis que $h_2=2\,h_0+h_1$, $h_3=2\,h_1+h_2=2\,h_0+3\,h_1$...

   On constate alors, par récurrence, que pour tout n, $h_{n+2}=2\,h_{n-2}+h_{n-1}$ (assez immédiat compte-tenu de la linéarité de u et de la définition de (h_n).)

   Mais alors, par récurrence également, on observe que pour $k\geq 2$, $\mathrm{rg}(h_0,\ldots,h_k)=2$.

   En effet, $\mathrm{rg}(h_0,h_1,h_2)=2$ et, si $k\geqslant 2$ est tel que $\mathrm{rg}(h_0,\ldots,h_k)=2$, alors $h_{k+1}=2\,h_{k-1}+k_k\in\mathrm{Vect}(h_0,\ldots,h_k)$ donc $\mathrm{Vect}(h_0,\ldots,h_k)=\mathrm{Vect}(h_0,\ldots,h_{k+1})$ et ainsi $\mathrm{rg}(h_0,\ldots,h_k)=\mathrm{rg}(h_0,\ldots,h_{k+1})=2$ ce qui achève la récurrence.

   Bien entendu, il ne peut alors exister d'entier k tel que $\mathrm{Vect}(h_0,\ldots,h_k)=\mathbb{R}^3$.

2. a. L'existence et l'unicité des réels $a_0,\cdots,a_{n-1}$ est une conséquence immédiate de ce que $(x,u(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ forme une base de E. La matrice de u selon cette base est assez immédiate elle aussi : $\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0&a_0\\1&\ddots&&&\vdots&a_1\\0&\ddots&\ddots&&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0&a_{n-2}\\0&\cdots&\cdots&0&1&a_{n-1}\end{pmatrix}$.

   b. Il s'agit d'établir que les applications linéaires u^n et $a_0\cdot\mathrm{Id}_E+a_1\cdot u+\cdots+a_{n-1}\cdot u^{n-1}$ sont égales. Ces deux applications prennent même valeur en x, mais aussi, en appliquant u de part et d'autre de l'égalité $u^n(x)=a_0\,x+\cdots+a_{n-1}\,u^{n-1}(x)$, en $u(x)$, puis en $u^2(x)$ jusqu'à $u^{n-1}(x)$. Ainsi ces deux applications linéaires coïncident sur tous les vecteurs d'une base de E et sont donc bien égales.

Exercice 3.

1. Voir cours !

2. f est définie par son action sur la base canonique $(e_1,\cdots,e_n)$ et on voit immédiatement que $(f(e_1),\cdots,f(e_n))$ est encore une base de $\mathbb{K}^n$ (à l'ordre des termes près, on retrouve la base canonique). De ce fait, f est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

Par défintion, il vient $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. J étant la matrice d'un automorphisme, alors J est une matrice inversible.

4. a. Puisque par hypothèse $E_{i,j} \notin H$, alors $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$ et ainsi $\varphi(I_n + \alpha\, E_{i,j}) = \varphi(I_n) + \alpha\, \varphi(E_{i,j})$ et clairement il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(I_n + \alpha\, E_{i,j}) = 0$. Mais alors $I_n + \alpha\, E_{i,j} \in H$.

   Il n'est pas bien difficile de voir que $I_n + \alpha\, E_{i,j}$ est une matrice inversible Voici quelques arguments possibles :

   - c'est une matrice triangulaire de termes diagonaux tous non nuls
   - les vecteurs lignes (ou colonnes) forment une famille libre (cela saute vraiment aux yeux !)
   - on peut bien sûr aussi évoquer le déterminant de $I_n + \alpha\, E_{i,j}$.

   Mais alors il est, dans ce cas, bien établi que H contient au moins une matrice inversible.

   b. Si pour tout $i \neq j$, $E_{i,j} \in H$, alors $J = E_{2,1} + \cdots + E_{n,n-1} + E_{1,n} \in H$ et, comme on l'a vu, J est inversible, ce qui assure que H contient bien au moins une matrice inversible.

Analyse

1. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, alors $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\sum_{k=2}^{n} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et le résultat s'en déduit.

2. Des inégalités précédentes, on déduit que $H_n = \ln(n) + \mathcal{O}(1)$ ce qui assure que $H_n \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.

3. a. Soit $n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant 0$ toujours en vertu de ce que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.1,5

   b. De ce qui précéde, on déduit que (u_n) est une suite de réels positifs (plus précisément, on a pour tout n, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$). Etant également décroissante, alors (u_n) est convergente. Comme de plus 1 majore (u_n), la limite γ de (u_n) appartient bien à $[0, 1]$.

4. a. On cite bien sûr son cours : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle, donc en vertu du critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une série convergente (mais manifestement pas absolument convergente)

   b. Soit $n \geqslant 1$, alors $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. De ce qui précède, $H_{2n} - H_n = \ln(2) + o(1)$ et on en déduit que $\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ converge de limite $\ln(2)$ et ainsi donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

5. a. A l'aide de deux intégrations par parties successives, il vient :

$$J_k = \frac{1}{2}\left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f'(t)\right]_k^{k+1} - \left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right) f(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   et la relation attendue s'en déduit.

   b. En sommant de $k = 1$ à $k = n-1$ les égalités précédentes, on parvient à $\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui est peu ou prou le résultat attendu.

6. a. On remarque que pour $t \in [k, k+1]$, $0 \leqslant \frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leqslant \frac{1}{4\,t^3}$ car $f''(t) = \frac{1}{2\,t^3}$ et $\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$. L'encadrement attendu s'en déduit.

   b. En sommant les inégalités précédentes, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, il vient $\sum_{k=1}^{n} J_k \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{4\,t^3}$ c-à-d $\sum_{k=1}^{n} J_k \leqslant \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ et ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum J_n$ est majorée (par $1/8$). S'agissant d'une série à termes positifs, alors elle est convergente (et de somme comprise entre 0 et $1/8$)

   c. En sommant de n à N où $N \geqslant n$, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{N} J_k \leqslant \int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{4\,t^3} \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{N^2}\right)$$

et, à la limite quand $N\to+\infty$, il vient donc $0\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty} J_k\leqslant\frac{1}{8\,n^2}$.

d. On note $s=\sum_{k=1}^{+\infty} J_k$ et on reprend l'identité de la 5.b., alors il vient, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,n}-\frac{1}{8\,n^2}+\frac{1}{8}-\sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

d'où l'on déduit que la limite γ de la suite (u_n) est égale à $\frac{5}{8}-s$ et celle-ci est donc comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8}$ puisque $0\leqslant s\leqslant\frac{1}{8}$.

De plus, comme $\sum_{k=1}^{n-1} J_k=s-\sum_{k=n}^{+\infty} J_k$ alors on a

$$u_n=H_n-\ln(n)=\gamma+\frac{1}{2\,n}-\frac{1}{8\,n^2}+\sum_{k=n}^{+\infty} J_k$$

et, de l'encadrement de la question 6.c., on déduit que $H_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2\,n}-\varepsilon_n$ où $0\leqslant\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{8\,n^2}$.

Problème d'algèbre

1. a. Comme $x\neq 0$, $(x,u(x))$ est libre si et seulement si $u(x)\notin\mathrm{Vect}(x)$. Or, s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $u(x)=\lambda\cdot x$, alors il vient, en appliquant u de part et d'autre, $u^2(x)=u(x)-x=\lambda\cdot u(x)$ puis $\lambda\cdot x-x=\lambda^2\cdot x$ ou encore $(\lambda^2-\lambda+1)\cdot x=0$. Mais avec $\lambda\in\mathbb{R}$, on a toujours $\lambda^2-\lambda+1\neq 0$ et ainsi $x=0$ ce qui est contradictoire.

   Ainsi il ne peut donc exister $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $u(x)=\lambda\cdot x$ ce qui montre que $(x,u(x))$ est libre.

   b. On note que $u(F_x)=\mathrm{Vect}(u(x),u(u(x)))=\mathrm{Vect}(u(x),u(x)-x)\subset\mathrm{Vect}(x,u(x))$ ce qui montre que F_x est stable par u. La dimension 2 de F_x se déduit immédiatement de la liberté de $(x,u(x))$.

   c. Si H contient x et est stable par u, alors $u(x)\in H$ et bien évidemment alors $F_x=\mathrm{Vect}(x,u(x))\subset H$.

   d. De la question précédente, on déduit que $F_y\subset F_x$. Mais, comme x et y sont non nuls, alors F_x et F_y ont la même dimension 2. Ils sont alors égaux.

   e. Supposons par l'absurde que $H\cap F_x\neq\{0_E\}$ et notons y non nul élément de $H\cap F_x$, alors $y\in F_x$ et on sait alors que $F_x=F_y$. Or de la question c., on sait que $F_y\subset H$ et on en déduit que $x\in H$ (puisque $x\in F_x$ et $F_x=F_y$), ce qui est contradictoire. Ainsi, par l'absurde, $H\cap F_y=\{0_E\}$ (H et F_y sont donc en somme directe.)

2. a. Il vient $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ puis $A^2-A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I_4$ et on en déduit que $u^2-u=\mathrm{Id}_E$.

   b. Il est immédiat que $x_3\notin\mathrm{Vect}(x_1,u(x_1))=\mathrm{Vect}((1,0,0,0),(1,-1,0,0))$. On déduit de ce qui précède que $F_{x_1}\cap F_{x_2}=\{0_E\}$ (d'après la 1.c. puisque F_{x_1} est stable par u et que $x_2\notin F_{x_2}$.)

   Mais alors F_{x_1} et F_{x_2} qui admettent respectivement pour bases $(x_1,u(x_1))$ et $(x_2,u(x_2))$ sont en somme directe, et par un argument de dimension $F_{x_1}\oplus F_{x_2}=E$ et ainsi $(x_1,u(x_1),x_2,u(x_2))$ est une base de $E=\mathbb{R}^4$.

   c. Comme $u(u(x_1))=u(x_1)-x_1$ et la même chose pour $u(u(x_2))$ la matrice de u selon cette base s'en déduit aisément : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3. a. On pose $H=\mathrm{Vect}(x_1,u(x_1),\cdots,x_p,u(x_p))$, alors $H=F_{x_1}\oplus\cdots\oplus F_{x_p}$ est, on le vérifie aisément, stable par u. De plus $x_{p+1}\in E\setminus H$ et on en déduit que $H\cap F_{x_{p+1}}=\{0_E\}$. Mais alors H et $F_{x_{p+1}}$ sont en somme directe et la famille obtenue en réunissant une base de H et une base de $F_{x_{p+1}}$ est une base de $H\oplus F_{x_{p+1}}$ et donc a fortiori une famille libre. Ceci établit donc bien que $(x_1,u(x_1),\cdots,x_p,u(x_p),x_{p+1},u(x_{p+1}))$ est encore une famille libre de E.

   b. Comme une famille libre de E ne peut compter, au maximum, que n vecteurs, l'algorithme présenté par l'énoncé ne peut comporter plus que $\frac{n}{2}$ étapes. Si celui-ci s'interrompt au bout de q étapes pour obtenir $(x_1,\cdots,x_q)$ une famille de E telle que $(x_1,u(x_1),\cdots,x_p,u(x_q))$ soit libre, on sait que $(x_1,u(x_1),\cdots,x_p,u(x_q))$ est également génératrice de E car si elle ne l'était pas, on pourrait encore choisir $x_{q+1}\in E\setminus\mathrm{Vect}(x_1,u(x_1),\cdots,x_p,u(x_q))$ ce qui est en contradiction avec le postulat que notre algorithme s'était interrompu…

   Ainsi on est assuré par cet algorithme d'obtenir une base de E sous la forme d'une famille $(x_1,u(x_1),\cdots,x_p,u(x_q))$ ce qui indique que E est de dimension paire $2\,q$.

c. La matrice de u dans cette base prend une forme diagonale par blocs (avec des blocs 2×2 sur la diagonale) :

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

4. De ce qui précède, on sait qu'il existe $(x_1, \cdots, x_q)$ et $(y_1, \cdots, y_q)$ deux familles de E telles que $\mathcal{B} = (x_1, u(x_1), \cdots, x_q, u(x_q))$ et $\mathcal{B}' = (y_1, v(y_1), \cdots, y_q, v(y_q))$ soient des bases de E. De plus, les matrices de u selon $\mathcal{B}$ et de v selon $\mathcal{B}'$ sont l'une et l'autre égales à la matrice A obtenue à la question précédente. La matrice de v selon $\mathcal{B}$ est alors, d'après la formule de changement de base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\, A\, P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

   Mais alors, en notant φ l'endomorphisme de E qui admet pour matrice $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ selon la base $\mathcal{B}$, on a φ qui est un automorphisme puisque de matrice $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ selon la base $\mathcal{B}$ inversible et la relation matricielle précédente s'interprète donc aussi en $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ce qui prouve que $v = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$.

   u et v sont donc bien conjugués. En fait, on voit que deux endomorphismes u et v de E sont conjugués si et seulement si il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$.

Exercice 4.

1. On note f_n la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$. Celle-ci est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$, vaut 0 en 0 et de limite $+\infty$ en $+\infty$ et donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Il existe donc bien $u_n \in \mathbb{R}^+$ unique telle que $f_n(u_n) = 1$.

   On note de plus que $u_n > 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f_{n+1}(u_n) = 1 + u_n^{n+1} > f_{n+1}(u_{n+1})$ et, comme f_{n+1} est croissante, alors $u_n > u_{n+1}$.

3. (u_n) est ainsi décroissante et minorée, donc convergente.

   Soit $n > 1$, alors on a $u_n < 1$ (immédiat car $f_n(1) > 1$) et il vient donc, en reconnaissant la somme de termes d'une suite géométrique : $\frac{u_n - u_n^{n+1}}{1 - u_n} = 1$. De plus, $0 < u_n \leqslant u_2 < 1$ et on en déduit que $u_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Il vient donc, à la limite quand $n \to +\infty$, $\frac{l}{1-l} = 1$ ce qui conduit à $l = \frac{1}{2}$.

4. On reprend l'égalité précédente, en remplaçant u_n par $\frac{1}{2} + \varepsilon_n$ et il vient $\frac{1}{2} + \varepsilon_n - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^{n+1} = 1 - \varepsilon_n - \frac{1}{2}$ ou encore $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^{n+1}$.

   Or $\varepsilon_n \to 0$ et, si $\frac{1}{2} < \rho$, alors il existe un rang N à partir duquel $\varepsilon_n < \rho - \frac{1}{2}$, et donc, pour $n \geqslant N$, $\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_N\right)^{n+1}$ et on en déduit que $\varepsilon_n = o(\rho^n)$ (puisque $0 \leqslant \frac{1}{2} + \varepsilon_N < \rho$)

5. De l'égalité $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^{n+1}$ on déduit désormais que

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+1}} \exp((n+1)\ln(1 + 2\,\varepsilon_n)) = \frac{1}{2^{n+1}} \exp\left((n+1)\ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \sim \frac{1}{2^{n+1}}$$

   car $\varepsilon_n = o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.