Equations différentielles

Réponse 1. En notant F une primitive de $t \mapsto -a(t)$ sur I, alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda\, e^{F(t)} | \lambda \in \mathbb{K}\}$. (C'est donc aussi la droite vectorielle qu'engendre $t \mapsto e^{F(t)}$.)

Réponse 2. Bien sûr, on fait appel à la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, f(t)$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable. On reporte dans (E) et on voit que λ convient si et seulement si pour tout $t \in I$, $\lambda'(t) = \frac{b(t)}{f(t)}$. Une solution de (E) est alors $t \mapsto \int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u \times f(t)$ et l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u + \lambda \right) f(t) | \lambda \in \mathbb{K} \right\}$. La solution de condition initiale $y(t_0) = y_0$ s'en déduit : $t \mapsto (\int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u + \frac{y_0}{f(t_0)})\, f(t)$.

Réponse 3. On associe à (E_H) son équation caractéristique $(*)\; a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

- Si $(*)$ admet deux racines distinctes $\alpha \neq \beta$ dans $\mathbb{K}$, alors l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto \lambda\, e^{\alpha t} + \mu\, e^{\beta t} | (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$.
- Si $(*)$ admet une racine double α dans $\mathbb{K}$, l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto (\lambda + \mu\, t)\, e^{\alpha t} | (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $(*)$ admet des racines complexes conjuguées (distinctes) $\gamma + \mathrm{i}\,\delta$ et $\gamma - \mathrm{i}\,\delta$, alors l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto (\lambda \cos(\delta\, t) + \mu \sin(\delta\, t))\, e^{\gamma t} | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Réponse 4. On résout d'abord l'équation homogène associée, laquelle s'écrit sous forme dite résolue : $y' = -\frac{1}{x}\, y$ et admet pour ensemble des solutions $\{x \mapsto \lambda \exp(-\ln(x)) | \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation complète, et ce sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ où $\lambda : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est supposée dérivable.

λ convient alors si et seulement si pour tout $x > 0$, $x\, \frac{\lambda'(x)}{x} = \cos x$ si et seulement si pour tout x, $\lambda'(x) = \cos x$. On voit donc que $\lambda = \sin$ convient et qu'une solution de l'équation complète est alors $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (n'oubliez pas qu'une fois trouvée une fonction λ qui convient, la solution qu'on a ainsi obtenue est $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$.)

L'ensemble des solutions de l'équation complète est alors $\left\{ x \mapsto \frac{\lambda + \sin(x)}{x} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Réponse 5. On cherche une solution de cette équation sous la forme $t \mapsto P(t)\, e^t$ où P est une fonction deux fois dérivable (qu'on devine pouvoir prendre polynomiale). On reporte dans l'équation et on voit que P convient si et seulement si pour tout t, $P''(t) + 3\, P'(t) + 3\, P(t) = t$ et il vient que $P(t) = t/3 - 1/3$ convient, et donc une solution est $t \mapsto (t/3 - 1/3)\, e^t$.

Réponse 6. On cherche d'abord une solution de $y'' - y' + y = e^{2\mathrm{i}t}$ et ce sous la forme $t \mapsto \lambda\, e^{2\mathrm{i}t}$. On reporte dans l'équation et on voit que λ convient si et seulement si $(-4 - 2\,\mathrm{i} + 1)\, \lambda = 1$ si et seulement si $\lambda = \frac{1}{-3 - 2\,\mathrm{i}} = \frac{-3 + 2\,\mathrm{i}}{13}$. Une solution de notre équation est alors donnée par $t \mapsto \mathrm{Im}\left(\frac{-3 + 2\,\mathrm{i}}{13}\, e^{2\mathrm{i}t} \right) = \frac{2}{13} \cos(2\,t) - \frac{3}{13} \sin(2\,t)$

Réponse 7. On cherche une solution sous la forme $t \mapsto P(t)\, e^{-2t}$ où P est deux fois dérivable : P convient (après simplifications) si et seulement si pour tout t, $P''(t) = t$ et ainsi $P(t) = \frac{t^3}{6}$ convient et une solution de notre équation est ainsi $t \mapsto \frac{t^3}{6}\, e^{-2t}$.