

Espaces vectoriels normés

Question 1. Définition d'une norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E

Question 2. Quand dit-on de deux normes N_1 et N_2 d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E qu'elles sont équivalentes ?

Question 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soient $x \in E$ et $r > 0$. Donner la définition de la boule ouverte de centre x et de rayon r , de la boule fermée de centre x et de rayon r , de la sphère de centre x et de rayon r .

Question 4. Donnez l'exemple de normes équivalentes, et un exemple de normes non équivalentes

Question 5. Soit E un espace vectoriel et A et B éléments de E (qu'on interprète comme des points). Que désigne-t-on par $[AB]$?

Question 6. Soit E un espace vectoriel et X une partie de E . Quand dit-on que X est une partie convexe ?

Question 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et X une partie de E . Quand dit-on que X est bornée ?

Question 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit (u_n) une suite de E et $l \in E$, donner la définition de ce que (u_n) converge vers l .

Question 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $x \in E$. Quand dit-on que x est intérieur à X ? Que désigne $\overset{\circ}{X}$?

Question 10. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $x \in E$. Quand dit-on que x est adhérent à X ? Que désigne-t-on alors par \overline{X} ?

Question 11. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit X une partie de E . Quand dit-on que X est une partie ouverte de E ?

Question 12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit X une partie de E . Quand dit-on que X est une partie fermée de E ?

Question 13. Que dire de la réunion, de l'intersection de parties ouvertes ? de parties fermées ?

Question 14. Soient E et F des espaces vectoriels normés, $X \subset E$ et $f: X \rightarrow F$ une application. Soient de plus $a \in \overline{X}$ et $l \in F$. Rappeler la définition de ce que f a pour limite l en a , puis en donner la caractérisation séquentielle

Question 15. Comment montrer que l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ constitue une partie ouverte ?

Question 16. Énoncer le théorème des bornes atteintes.