Limites et continuité (version sup)

$\mathbb{K}$ désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Réponse 1. (u_n) converge vers l si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Réponse 2. (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n > M$.

Réponse 3. (u_n) diverge vers $-\infty$ si et seulement si $\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n < m$.

Réponse 4. $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0, et $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Réponse 5. $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On peut l'établir en remarquant que $u_n = v_n + o(v_n)$ ou bien $v_n = u_n + o(u_n)$.

Réponse 6. f admet pour limite l en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

si et seulement si pour toute suite (u_n) de A qui converge vers a, $(f(u_n))$ converge vers l.

Réponse 7. ou bien elle est majorée, et elle converge de limite $l = \sup u_n$, ou bien elle diverge vers $+\infty$.

Réponse 8. ou bien elle est minorée, et converge de limite $l = \inf u_n$, ou bien elle diverge vers $-\infty$.

Réponse 9. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ceci est équivalent à ce que pour tout $x_1 < x_2$ éléments de I et $y \in [f(x_1), f(x_2)]$, alors il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$.

Réponse 10. f a pour limite l en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x >]A, +\infty[\cap D, |f(x) - l| < \varepsilon$$

f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x >]A, +\infty[\cap D, f(x) > M$$

f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x >]A, +\infty[\cap D, f(x) < m$$

Réponse 11. f a pour limite l en $-\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x >]-\infty, A[\cap D, |f(x) - l| < \varepsilon$$

f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x >]-\infty, A[\cap D, f(x) > M$$

f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x >]-\infty, A[\cap D, f(x) < m$$

Réponse 12. f a pour limite l en a si et seulement si pour tout voisinage V_l de l, alors il existe V_a un voisinage de a tel que $f(V_a \cap D) \subset V_l$. Toutes les limites énoncées reposent sur ce principe.

Réponse 13. f admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en b. Plus précisément : ou bien f est majorée et elle admet une limite finie $l = \sup\{f(x) | x \in [a, b[\}$, ou bien f admet pour limite $+\infty$ en b.

Réponse 14. f admet une limite $l \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ en a. Plus précisément : ou bien f est minorée sur $]a, b]$ et elle admet alors une limite finie $l = \inf\{f(x) | x \in]a, b]\}$, ou bien f n'est pas minorée et elle admet pour limite $-\infty$ en a.

Réponse 15. Oui, dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Plus précisément, ou bien f est minorée et elle admet alors une limite finie $l = \inf\{f(x) | x \in [a, b[\}$ ou bien elle ne l'est pas et elle a pour limite $-\infty$ en b.

Réponse 16. Oui, dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Plus précisément, ou bien f est majorée et elle admet alors une limite finie $l = \sup\{f(x) | x \in]a, b]\}$ ou bien elle ne l'est pas et elle a pour limite $+\infty$ en a.

Réponse 17. Plusieurs choses : f est bornée et atteint ses bornes (on cite ce résultat ainsi : f réelle continue sur un **segment** est bornée et atteint ses bornes).

Le théorème des valeurs intermédiaires énonce que $f([a, b])$ est un intervalle.

En combinant les deux résultats énoncés ci-dessus, on peut préciser que $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$.

Réponse 18. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$ dont la bijection réciproque est également strictement monotone et continue, de même variation que f.

Solution 1. On cherche donc x tel que $f(x) = x$. On pense bien sûr au théorème des valeurs intermédiaires, mais encore faut-il penser à la bonne fonction, et bien sûr ce n'est pas f ! Si on réécrit la condition souhaitée sous la forme $f(x) - x = 0$ tout devient plus clair :

On pose $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x, g(x) = f(x) - x$ et on remarque que g est continue. De plus $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

Solution 2. On pose g qui à $x \in [a, b]$ associe $g(x) = f(x) - x$ et on remarque que g est continue. Il s'agit donc de montrer que g s'annule et, pour ce faire, on montre qu'elle change de signe. Ici, on ne connaît pas le signe de $g(a)$ ni de $g(b)$. En revanche, on sait que $a \in f([a, b])$ et il existe donc $x_a \in [a, b]$ tel que $f(x_a) = a$, et de même il existe $x_b \in [a, b]$ tel que $f(x_b) = b$. On remarque alors que $g(x_a) \leqslant 0$ et $g(x_b) \geqslant 0$ et on conclut avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 3. On cite le théorème bien connu (bornes atteintes) que f réelle continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, et en particulier il existe donc $x_m \in [a, b]$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant f(x_m)$. On pose alors $\alpha = f(x_m)$.

Solution 4. Il est connu que puisque f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est bornée au voisinage de $+\infty$, ainsi il existe $A \in \mathbb{R}^+$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > A$, $|f(x)| \leqslant M$. (On peut aussi redémontrer ce résultat à l'aide de la définition d'une limite : on sait qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x > A, |f(x) - L| < 1$, et on en déduit que pour tout $x > A$, $|f(x)| \leqslant |L| + 1$. Ensuite, on note que $|f|$ est continue sur le segment $[0, A]$, à valeurs réelles, donc est bornée et atteint ses bornes, et il existe donc $M' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0, A]$, $|f(x)| \leqslant M'$. Mais alors, $\max(M, M')$ majore $|f|$ sur $\mathbb{R}$ et on a donc bien montré que f est bornée.