Limites et continuité (version sup)

$\mathbb{K}$ désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Question 1. Définition de ce qu'une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ converge de limite l.

Question 2. Définition de ce qu'une suite (u_n) de $\mathbb{R}$ diverge vers $+\infty$

Question 3. Définition de ce qu'une suite (u_n) de $\mathbb{R}$ diverge vers $-\infty$

Question 4. Etant donnée (v_n) une suite de $\mathbb{K}$ qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et (u_n) une suite quelconque, quand peut-on écrire $u_n = o(v_n)$? $u_n = \mathcal{O}(v_n)$?

Question 5. Etant données (u_n) et (v_n) des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, à quelle condition peut-on écrire $u_n \sim v_n$?

Question 6. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une application, $a \in I$ ou une borne de I et $l \in \mathbb{K}$. Définition de ce f admet pour limite l en a, et sa caractérisation séquentielle.

Question 7. Que dire d'une suite croissante (u_n) de réels ?

Question 8. Que dire d'une suite décroissante (u_n) de réels ?

Question 9. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires

Question 10. Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Définition de ce que f admet une limite finie l en $+\infty$, de ce que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, $-\infty$ en $+\infty$.

Question 11. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Définition de ce que f admet une limite finie l en $-\infty$, de ce que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, $-\infty$ en $-\infty$.

Question 12. Soit $f : A \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{A} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donner la définition de ce f a pour limite l en a en s'aidant de la notion de voisinage

Question 13. Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ croissante. f a-t-elle une limite en b ?

Question 14. Soient $a < b$ deux réels, et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ croissante. f a-t-elle une limite en a ?

Question 15. Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ décroissante. f a-t-elle une limite en b ?

Question 16. Soient $a < b$ deux réels, et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ décroissante. f a-t-elle une limite en a ?

Question 17. Que dire de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue ?

Question 18. Enoncé du théorème de la bijection

Exercice 1. Soient $a < b$ deux réels. Montrer que $f : [a, b] \to [a, b]$ continue admet au moins un point fixe.

Exercice 2. Soient $a < b$ deux réels, et on suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, et que de plus $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant \alpha$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue et admettant une limite finie L en $+\infty$. Montrer que f est bornée.