

Polynômes

Question 1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, que dire de $d(P+Q)$? de $d(P \times Q)$?

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, donner la dimension et une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Question 3. Soient x_0, \dots, x_n des éléments deux à deux distincts de \mathbb{K} . On note, pour $0 \leq i \leq n$,

$$L_i(X) = \prod_{0 \leq k \leq n, k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

1. Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, donner les coordonnées de P selon cette base.
3. Que vaut $L_0 + \dots + L_n$?

Question 4. Division euclidienne de deux polynômes

Question 5. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$. On suppose que $A^2 - 3A + 2I_p = 0$. Montrez que A est inversible et précisez A^{-1} .
Donner également une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 6. Formule(s) de Taylor pour des polynômes

Question 7. Quand dit-on de $\lambda \in \mathbb{K}$ qu'elle est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité m ?

Question 8. Définition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Question 9. Quels sont les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$?

Question 10. Quels sont les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?

Question 11. Qu'est-ce qu'un polynôme scindé ?

Question 12. Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ un polynôme scindé de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non supposées 2 à 2 distinctes).
Donnez l'expression de $\sum \lambda_k$ et de $\prod \lambda_k$.

Question 13. Soient S et P deux complexes. Le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$ d'inconnues $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ admet-il toujours une solution ?

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un entier, et f l'application qui à $P \in \mathbb{K}_n[X]$ associe $f(P) = P - P'$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, puis montrer sa bijectivité
 - a) sans utiliser de matrice de f
 - b) en utilisant une matrice de f .
2. Soit $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, déterminer $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$.