Séries numériques

Réponse 1. Si et seulement si $\alpha > 1$.

Réponse 2. C'est une ânerie ! Il manque ici une hypothèse essentielle : la positivité de (u_n) et (v_n) .

Un contre-exemple est $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui converge, et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ qui diverge car

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

or $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées, $\sum \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann, mais $\sum -\frac{1}{n}$ diverge.

Réponse 3. La suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est croissante, donc pour établir sa convergence, et ainsi celle de la série $\sum u_n$, il suffit d'établir qu'elle est majorée.

Alternative : si on connaît une série convergence $\sum v_n$ telle que pour tout n , $0 \leq u_n \leq v_n$, alors on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$.

Réponse 4. Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente. De plus, sa somme est toujours encadrée par deux termes consécutifs de la suite des sommes partielles et, la somme est du signe de son premier terme, et majorée en valeur absolue par celui-ci. (Ceci est aussi valable pour les sommes partielles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et majoré en valeur absolue par a_{n+1} .)

Réponse 5. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ a pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $l < 1$, alors $\sum a_n$ converge. Si $l > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement. Si $l = 1$ on ne peut rien dire !

On applique souvent la règle de d'Alembert à des séries de complexes ou de réels non nuls, il suffit alors bien sûr de mettre des valeurs absolues (ou des modules).

Si ainsi (a_n) est une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ converge de limite $l \in [0, 1[$, alors $\sum a_n$ converge absolument, et si $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ tend vers $l > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Réponse 6. De la série $\sum a_n$ où $a_0 = u_0$ et, pour tout $n > 0$, $a_n = u_n - u_{n-1}$.

Ceci permet de traduire un problème relatif à une suite de $\mathbb{K}$ à un problème relatif à une série de $\mathbb{K}$, et réciproquement.

Réponse 7. C'est bien sûr une ânerie. Pour que $\sum u_n$ converge, il est nécessaire, mais non suffisant, que $u_n \rightarrow 0$. Lorsque (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement. Un exemple de série qui diverge, mais non grossièrement est la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Réponse 8. $\sum u_n$ converge si et seulement si $|\rho| < 1$ (on peut préciser que si $|\rho| \geq 1$, elle diverge grossièrement) et, si tel est le cas, alors sa somme vaut $u_0 (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \frac{u_0}{1 - \rho}$.

Réponse 9. C'est faux, car pour conclure, il faut une hypothèse supplémentaire, à savoir que la suite (v_n) soit positive. Un contre-exemple pourrait être $\frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, pourtant $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais pas $\sum \frac{1}{n}$.

Le bon énoncé serait donc : si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, que $\sum v_n$ est une série à termes positifs convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente (et donc converge tout court)

Réponse 10. C'est toujours faux ! Par exemple en posant $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $u_n = \frac{1}{n}$, donc ici aussi l'hypothèse de positivité de (v_n) est indispensable.

Réponse 11. Le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où, pour tout n , $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. Une condition suffisante à ce que $\sum w_n$ converge est la convergence absolue des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et, de plus, si tel est le cas, alors la somme de $\sum w_n$ est le produit des sommes respectives de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$.

Attention : la convergence tout court des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ n'est pas suffisante, mais les contre-exemples sont assez difficiles.

Réponse 12. Plusieurs réponses sont possibles. De la décroissance de f on déduit :

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

Si on veut faire apparaître la même intégrale de part et d'autre, on peut préférer remarquer :

$$\int_0^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

Solution 1. On ne peut appliquer directement le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n+(-1)^n}\right)$ n'est pas une suite décroissante de réels, alors on calcule un développement asymptotique :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis on remarque que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente en vertu du critère spécial des séries alternées ($\frac{1}{n}$ est décroissante et converge vers 0) tandis que $\sum -\frac{1}{n^2}$ et $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont absolument convergentes toutes deux par comparaison à une série de Riemann. Ainsi $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

Solution 2. On fait un développement asymptotique, en partant de ce que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ou bien de ce que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$ jusqu'à faire apparaître que le terme général de notre série est la somme du terme général d'une série convergente et du terme général d'une série divergente. Il en résulte la divergence de cette série.

Solution 3. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k+1}$ puis on calcule des sommes partielles et on passe à la limite. La somme vaut $\frac{3}{4}$.

Solution 4. la conclusion est facile avec le critère de Riemann si $\alpha > 1$ (convergence, par comparaison à $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$) ou si $\alpha < 1$ (divergence : en effet $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$ et on sait $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ divergente, et $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ étant à termes positifs, alors cette dernière ne saurait converger)

Si maintenant $\alpha = 1$, le résultat est encore immédiat si $\beta \leq 0$. Enfin, si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, alors $x \mapsto x(\ln x)^\beta$ est croissante, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et donc $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est positive et décroissante, donc on sait que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ est convergente ssi $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et il est un exercice classique (vu en cours) que c'est le cas si, et seulement si $\beta > 1$.

Solution 5. $\frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ est la partie imaginaire de $\frac{e^{in\theta}}{2^n}$ (on reconnaît le terme général d'une suite géométrique) et, comme $\left|\frac{e^{i\theta}}{2}\right| < 1$ on sait que $\sum \frac{e^{in\theta}}{2^n}$ converge de somme $\frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}}$ dont on n'a plus qu'à extraire la partie imaginaire qui vaut (sauf erreur) $\frac{2 \sin(\theta)}{5 - 4 \cos(\theta)}$.