Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 1

¤ Premier problème

II.A.1) Une quantité n de gaz passe du volume total $V_c + N(v+V_0)$ à $V_c + Nv$: $P_0(V_c + N(v+V_0)) = nRT_0 = P_1(V_c + Nv)$ [1] d'où $\boxed{P_1 = P_0\left(1+\dfrac{NV_0}{V_c+Nv}\right) = 1{,}13\text{ bar}}$. Le caisson passe de $n_0 = \dfrac{P_0V_c}{RT_0}$ à $n_1 = \dfrac{P_1V_c}{RT_0}$: $\Delta n = \dfrac{(P_1-P_0)V_c}{RT_0}$ soit $\boxed{\Delta n = \dfrac{NV_0}{V_c+Nv}\dfrac{P_0V_c}{RT_0} = 803\text{ mol}}$.

II.A.2) La soupape S_1 s'ouvre lorsque la pression, dans le volume compris entre chaque piston et EF, devient égale à P_0. Par conservation de la quantité de matière : $n'RT_0 = P_1Nv = P_0N(v+s\,x_1)$ [2] d'où $x_1 = \left(\dfrac{P_1}{P_0}-1\right)\dfrac{v}{s} = \dfrac{NV_0}{V_c+Nv}\times\dfrac{v}{s}$ soit $\boxed{x_1 = \dfrac{N\,v\,d}{V_c+Nv}}$.

II.A.3) La transformation est isotherme quasi statique, et même réversible car il n'y a pas de frottements.

Alors $w = -\displaystyle\int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V = -nRT_0\int_{V_i}^{V_f}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT_0\ln\frac{V_c+Nv}{V_c+Nv+NV_0}$ soit finalement $\boxed{w = P_0(V_c+N(v+V_0))\ln\left(1+\dfrac{NV_0}{V_c+Nv}\right)}$.

Premier principe pour l'air : $\Delta U = w+q$, avec $\Delta U = C_V\Delta T = 0$, d'où $\boxed{q=-w}$. AN $\boxed{w=-q=2{,}12\text{ MJ}}$.

II.A.4) Le travail w calculé précédemment est exercé par l'air extérieur *et* par le moteur. Le travail exercé par le moteur seul est donc :

$W_a = w - w_{\text{air ext}} = w + \displaystyle\int_{V_i}^{V_f} P_0\,\mathrm{d}V = w - P_0NV_0$ soit $\boxed{W_a = P_0(V_c+N(v+V_0))\ln\left(1+\dfrac{NV_0}{V_c+Nv}\right) - P_0NV_0 = P_1(V_c+Nv)\ln\dfrac{P_1}{P_0} - P_0NV_0}$.

Lors du retour, il n'y a du travail que jusqu'à l'ouverture de S_1, car ensuite la pression est P_0 des deux côtés et il n'y a pas de frottements : $W_r = w' - w'_{\text{air ext}}$ avec $w' = -\displaystyle\int_{V_i'}^{V_f'} P\,\mathrm{d}V = -n'RT_0\ln\frac{v+s\,x_1}{v} = -P_1Nv\ln\frac{P_1}{P_0}$ et $w'_{\text{air ext}} = -\displaystyle\int_{V_i'}^{V_f'} P_0\,\mathrm{d}V = -P_0N\,s\,x_1$, d'où

$\boxed{W_r = -P_1Nv\ln\dfrac{P_1}{P_0} + P_0N\,s\,x_1}$. Total : $W_m = W_a + W_r = P_1(V_c+Nv)\ln\dfrac{P_1}{P_0} - P_0NV_0 - P_1Nv\ln\dfrac{P_1}{P_0} + P_0N\,s\,x_1 = P_1V_c\ln\dfrac{P_1}{P_0} + P_0N(s\,x_1 - V_0)$. Or

$P_0N\,s\,x_1 = (P_1-P_0)Nv$ d'après [2] et $(P_0-P_1)(V_c+Nv) = -P_0NV_0$ d'après [1], d'où $\boxed{W_m = P_1V_c\ln\dfrac{P_1}{P_0} + (P_0-P_1)V_c}$. AN $\boxed{W_a = 124\text{ kJ}}$;

$\boxed{W_r = -4\text{ kJ}}$; $\boxed{W_m = 120\text{ kJ}}$. Une grande partie du travail reçu par l'air comprimé est en fait fournie par l'air extérieur. Par ailleurs, une petite partie du travail fourni par le moteur à la compression est récupérée lors de la détente.

II.A.5) La pression P est telle que $P_0N(v+V_0) = n_iRT_0 = PN(v+sx)$. Les soupapes s'ouvrent si la pression maximale (en x = 0) est supérieure à P_i : $\boxed{P = P_0\left(1+\dfrac{V_0}{v}\right) > P_i}$. L'ouverture a lieu lorsque $P = P_i$: $P_0N(v+V_0) = P_iN(v+s\alpha_{i+1})$ d'où $\boxed{\alpha_{i+1} = \dfrac{P_0(v+V_0) - P_i v}{P_i s}}$.

Alors $P_{i+1}[Nv+V_c] = P_i[N(v+s\alpha_{i+1})+V_c] = P_0N(v+V_0) + P_iV_c$ d'où $P_{i+1} = P_0\dfrac{N(v+V_0)}{Nv+V_c} + P_i\dfrac{V_c}{Nv+V_c}$.

Cette formule s'identifie à la formule cherchée en posant $\boxed{a = \dfrac{V_c}{Nv+V_c} = 0{,}968}$ et $\dfrac{N(v+V_0)}{Nv+V_c} = b(1-a)$ d'où $\boxed{b = 1+\dfrac{V_0}{v} = 5}$.

II.A.6) $P_n - bP_0 = a^n(P_0 - bP_0)$ soit $\boxed{P_n = (b+a^n(1-b))P_0}$. La limite vérifie $P_\infty - bP_0 = a(P_\infty - bP_0)$ d'où $\boxed{P_\infty = bP_0 = \left(1+\dfrac{V_0}{v}\right)P_0 = 5P_0}$.

Comme on l'a vu à la question **II.A.5**, c'est la pression au-delà de laquelle <u>les soupapes ne s'ouvrent plus</u>.

II.A.7)a) Comme précédemment, on peut écrire sur une isotherme (réversible) : $\delta W_{m,i+1} = -\delta nRT_0\ln\dfrac{V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}}$ soit $\boxed{\delta W_{m,i+1} = \delta nRT_0\ln\dfrac{P(t)}{P_0}}$.

II.A.7)b) On introduit δn à volume constant V_c et à température constante T_0 : $\boxed{\mathrm{d}P = \dfrac{\delta nRT_0}{V_c}}$.

II.A.7)c) $\boxed{\delta W_{m,i+1} = V_c\,\mathrm{d}P\ln\dfrac{P(t)}{P_0}}$. On intègre selon P : $W_{m,i+1} = \displaystyle\int_{P_i}^{P_{i+1}} V_c\,\mathrm{d}P\ln\frac{P(t)}{P_0} = P_0V_c\int_{P_i/P_0}^{P_{i+1}/P_0}\ln x\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \dfrac{P(t)}{P_0}$. Or une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$: $W_{m,i+1} = P_0V_c\left[\dfrac{P_{i+1}}{P_0}\ln\left(\dfrac{P_{i+1}}{P_0}\right) - \dfrac{P_{i+1}}{P_0} - \dfrac{P_i}{P_0}\ln\left(\dfrac{P_i}{P_0}\right) + \dfrac{P_i}{P_0}\right] \Leftrightarrow \boxed{W_{m,i+1} = V_c\left[P_{i+1}\ln\left(\dfrac{P_{i+1}}{P_0}\right) - P_{i+1} - P_i\ln\left(\dfrac{P_i}{P_0}\right) + P_i\right]}$.

II.A.7)d) Pour i = 0 : $W_{m,1} = V_c\left[P_1\ln\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right) - P_1 + P_0\right]$ qui est identique à l'expression trouvée à la question **II.A.4**. On peut donc admettre que la formule générale est valable pour tout i.

II.A.8) On additionne les travaux sur l'ensemble des n va-et-vient : presque tous les termes s'éliminent et il reste $\boxed{W_t = V_c\left[P_n\ln\left(\dfrac{P_n}{P_0}\right) - P_n + P_0\right]}$.

II.A.9) On avait trouvé $P_\infty = 5P_0$, soit $\boxed{P_\infty = 5\text{ bar}}$. C'est effectivement supérieur à la valeur $P_f = 3P_0 = 3\text{ bar}$ que l'on souhaite obtenir.

Après ν coups, la pression est $P_\nu = (5-4a^\nu)P_0$, donc on cherche à obtenir $5 - 4a^\nu > 3 \Leftrightarrow a^\nu < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \nu > -\dfrac{\ln 2}{\ln a} = -\dfrac{\ln 2}{\ln 0{,}968} = 21{,}3$.

On doit donc prendre $\boxed{\nu = 22}$. La pression obtenue après le 22[e] coup de pompe est $\boxed{P_{22} = (5-4a^{22})P_0 = 3{,}04\text{ bar}}$, soit juste au-delà de la pression de consigne (on n'a donc pas fourni de surcompression inutile). Le travail total fourni se calcule avec la formule précédente : $W_t = V_c\left[P_{22}\ln\left(\dfrac{P_{22}}{P_0}\right) - P_{22} + P_0\right]$ soit $\boxed{W_t = 20\text{ MJ}}$.

II.B.1) Le volume d'air passe de V_c à V_f, à P_f et T_0 constantes, la quantité d'air entrée est donc : $\boxed{\Delta n = \dfrac{P_f(V_f - V_c)}{RT_0} = 120\text{ kmol}}$.

II.B.2) On fait passer une quantité Δn d'air de la pression extérieure P_0 à P_f de façon isotherme : $\boxed{W_t' = \Delta n RT_0 \ln\dfrac{P_f}{P_0} = \Delta n RT_0 \ln 3}$.

AN $\boxed{W_t' = 320\text{ MJ}}$.

II.B.3) Travail total : $\boxed{W_{\text{total}} = W_t + W_t' = 340\text{ MJ}}$. Pour une durée Δt = 1 h : $\boxed{\mathcal{P} = \dfrac{W_{\text{total}}}{\Delta t}}$. AN $\boxed{\mathcal{P} = 94\text{ kW}}$. C'est une puissance énorme pour un moteur, si on la compare à des appareils usuels (quelques kW) : cela correspond bien à l'échelle pharaonique du projet.

II.B.4) Un moteur thermique nécessite de l'air pour produire la combustion du carburant, il n'est donc pas utilisable au fond de l'eau. On peut penser plutôt à un moteur électrique, mais le gros problème est alors l'étanchéité du circuit.

Le projet MOSE peut être utile à court terme, si le phénomène d'*acqua alta* n'est pas trop fréquent. Il présente quand même l'inconvénient de bloquer la circulation des bateaux. Sur le long terme, il ne résout pas le problème de fond, à la fois d'enlisement de Venise et de montée générale des eaux : il s'apparenterait plutôt à un combat perdu d'avance…

¤ Deuxième problème

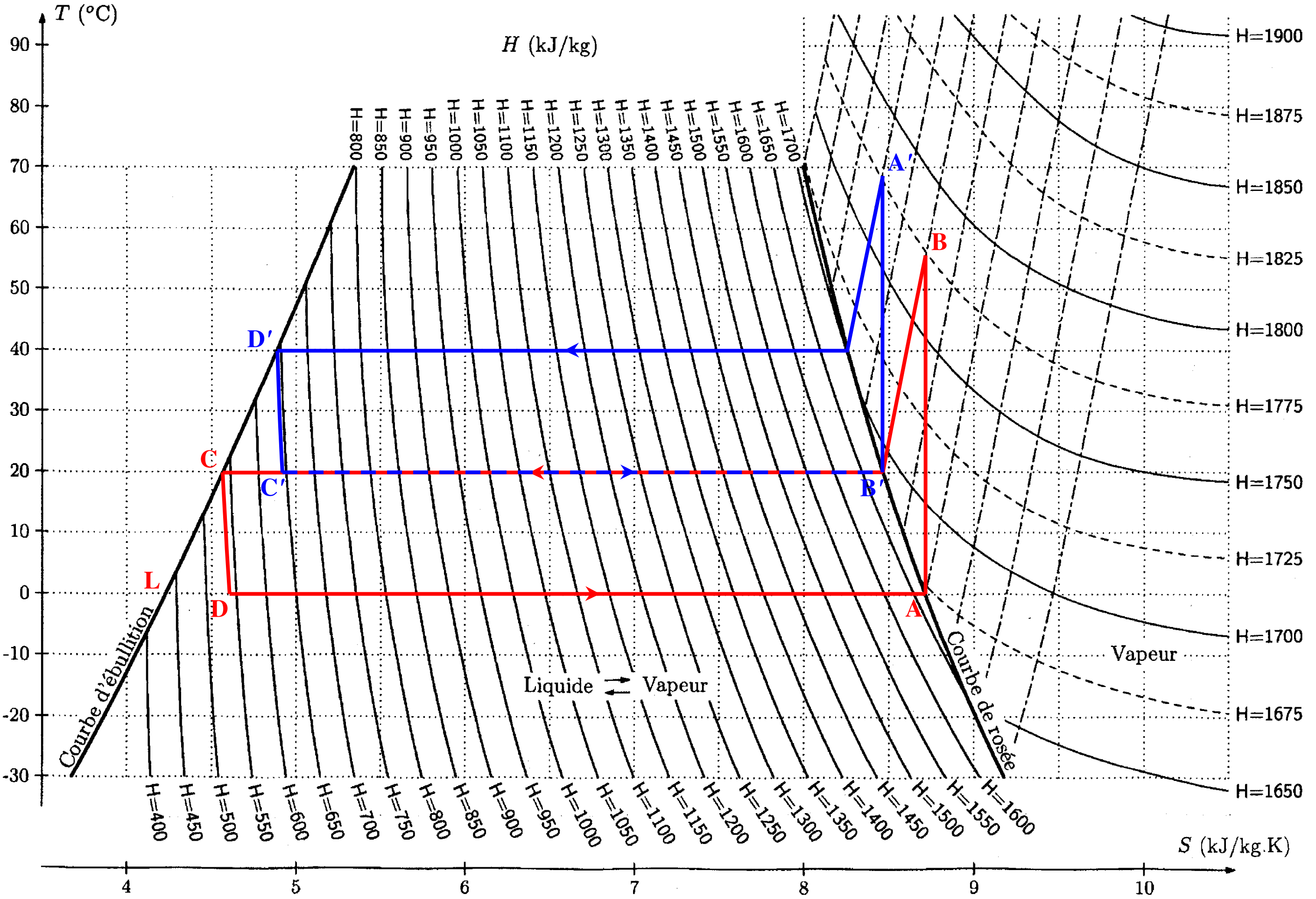
1.1) Un détendeur isenthalpique est constitué d'un simple tuyau rigide et calorifugé, avec un rétrécissement ou une paroi poreuse à l'intérieur : il s'agit d'une détente de Joule–Thomson (ou de Joule–Kelvin).

1.2) On passe de u à h lorsqu'on fait passer le travail « inutile » (entre les tranches successives du fluide) au premier membre ; le travail restant au second membre est uniquement le travail utile, échangé avec les pièces mécaniques mobiles de la machine.

1.3) La transformation dans le compresseur étant adiabatique, si on suppose de plus qu'elle est réversible (ce qui n'est pas précisé dans l'énoncé), on peut appliquer la loi de Laplace : $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$ donc $T_s^\gamma P_s^{1-\gamma} = T_e^\gamma P_e^{1-\gamma}$ d'où on tire $\boxed{\dfrac{T_s}{T_e} = \left(\dfrac{P_s}{P_e}\right)^{1-1/\gamma}}$.

1.4) L'enthalpie de vaporisation est $L_{\text{vap}}(T) = h_{\text{vapeur}}(T) - h_{\text{liquide}}(T)$ mais aussi $L_{\text{vap}}(T) = T\left[s_{\text{vapeur}}(T) - s_{\text{liquide}}(T)\right]$. On a donc quatre manières de la calculer : sur le premier graphe, en lisant les abscisses des extrémités de chaque palier (et en appliquant la seconde formule), ou bien en lisant les enthalpies sur les courbes isenthalpes (et en appliquant la première formule) ; sur le second graphe, en lisant les abscisses (première formule), ou en lisant les entropies sur les courbes isentropes (seconde formule), la température étant repérée avec les isothermes (mais en fait les isentropes s'arrêtent avant la courbe d'ébullition sur le graphe fourni, donc cette méthode est inapplicable ici). On trouve approximativement : $\boxed{L_{\text{vap}}(0\,°\text{C}) = 1240\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$; $\boxed{L_{\text{vap}}(20\,°\text{C}) = 1150\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$; $\boxed{L_{\text{vap}}(40\,°\text{C}) = 1060\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$.

2.1)
3.1)



À la sortie du compresseur, on lit $\boxed{T_B = 56\text{ °C}}$.

2.2) Compresseur : $\boxed{w = h_B - h_A = 1775 - 1670 = +105\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$. Échangeur E_1 : $\boxed{q_c = h_C - h_B = 540 - 1775 = -1235\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$.
Échangeur E_2 : $\boxed{q_f = h_A - h_D = h_A - h_C = 1670 - 540 = +1130\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$.

2.3) Le transfert souhaité est $q_c (< 0)$, le transfert dépensé est $w (> 0)$, donc $\boxed{\eta = -\dfrac{q_c}{w}}$. AN $\boxed{\eta = 12}$.

Par rapport à un chauffage par chaudière électrique, qui transforme 1 J de travail en 1 J de chaleur, ce système (pompe à chaleur) est <u>12 fois plus intéressant</u> en termes de consommation énergétique (avec 1 J de travail il donne 12 J de chaleur).

Avec un cycle de Carnot, réversible, on obtient l'efficacité maximale : $\boxed{\eta_{\max} = \dfrac{T_c}{T_c - T_f} = \dfrac{T_0}{T_0 - T_1} = 14{,}6}$. Le cycle de Carnot comporte <u>deux isothermes</u> (l'une est ici remplacée par une isobare) et <u>deux isentropiques</u> (l'une est ici remplacée par une isenthalpique)

2.4) On peut calculer X_D avec les enthalpies, les entropies ou les longueurs : $\boxed{X_D = \dfrac{h_D - h_L}{h_A - h_L} = \dfrac{s_D - s_L}{s_A - s_L} = \dfrac{\text{LD}}{\text{LA}} = 0{,}082\ \text{(ou 8,2 \%)}}$.

2.5) D'après la loi de Laplace : $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\ln(T_s/T_e)}{\ln(P_s/P_e)}}}$. AN $\gamma = 1{,}4$. (En fait le modèle du gaz parfait n'est pas valable dans cette zone, car les isenthalpes du diagramme (T,s) ne sont pas du tout horizontales, de même les isothermes du diagramme (P,h) ne sont pas verticales).

3.1) À la sortie du compresseur, on lit $\boxed{T_{A'} = 68\ °\text{C}}$.

3.2) Compresseur : $\boxed{w = h_{A'} - h_{B'} = 1775 - 1690 = +85\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$. Échangeur E_1 : $\boxed{q_1' = h_{B'} - h_{C'} = 1690 - 640 = +1050\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$.
Échangeur E_2 : $\boxed{q_2' = h_{D'} - h_{A'} = h_{C'} - h_{A'} = 640 - 1775 = -1135\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$.

3.3) Le transfert souhaité est ici $q_1' (> 0)$, le transfert dépensé est $w (> 0)$, donc $\boxed{\eta' = \dfrac{q_1'}{w}}$. AN $\boxed{\eta' = 12}$.