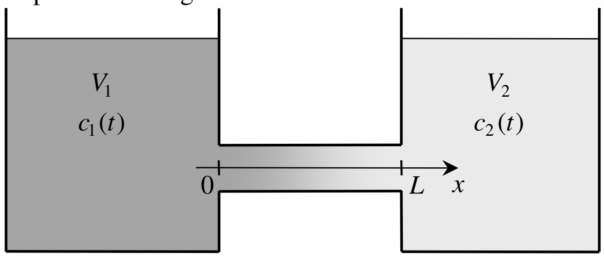
# Exercices du chapitre Th2

*Bilans et solutions stationnaires*

**1. Régime quasi stationnaire sans création/absorption**

Deux récipients de volumes $V_1$ et $V_2$ communiquent par un tuyau poreux de longueur $L$ et de section $S$.




Une solution moléculaire se trouve de part et d'autre, aux concentrations molaires respectives $c_1(t)$ et $c_2(t)$ ; chacune de ces concentrations est supposée uniforme dans tout le volume du récipient correspondant, et elles vérifient $c_1(t) > c_2(t)$.

Selon l'axe $(Ox)$ s'établit dans le tuyau un flux de molécules dont la densité molaire $j_n$ est donnée par la loi de Fick (sous forme molaire) avec un coefficient $D$.

a) Effectuer un bilan et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration $c(x,t)$ dans le tuyau.

b) Quel temps caractéristique $T$ peut-on associer à la diffusion dans le tuyau ?

On suppose maintenant que l'évolution des concentrations dans les deux récipients se fait sur une durée caractéristique $\tau$ très grande devant $T$ : ainsi, on peut faire l'approximation d'un régime stationnaire de diffusion.

c) Montrer alors que dans le tuyau, la concentration est une fonction affine de $x$, et en déduire que la densité de courant molaire $j_n$ est proportionnelle à $\Delta c = c_1 - c_2$.

d) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\Delta c(t)$.

e) Intégrer cette équation en introduisant un temps de relaxation $\tau$ que l'on précisera.

**2. Diffusion dans un semi-conducteur**

Dans un barreau cylindrique de silicium d'axe $(Ox)$, de section droite $A$ et de longueur $L$ (très grande), on étudie le courant électrique dû à la diffusion de particules $P$ de charge électrique $q$. Le nombre de particules $P$ par unité de volume est noté $n^*(x,t)$ ; le coefficient de diffusion est $D$.

Dans le silicium, les particules $P$ peuvent être créées par un processus thermique, le nombre de particules créées par unité de volume pendant $\mathrm{d}t$ étant : $\delta n_1^* = \dfrac{k}{\tau}\mathrm{d}t$ (avec $k$ et $\tau$ deux constantes positives). Elles peuvent être également absorbées selon la loi : $\delta n_2^* = \dfrac{n^*(x,t)}{\tau}\mathrm{d}t$.

a) Effectuer un bilan et en déduire l'équation de diffusion.

On suppose établi un régime stationnaire. On pose $L_\mathrm{m} = \sqrt{D\tau}$ et on suppose la longueur du barreau quasi infinie : $L \gg L_\mathrm{m}$.

b) Déterminer $n^*(x)$ en fonction de $n^*(0)$, $k$, $L_\mathrm{m}$ et $x$.

c) En déduire $\overrightarrow{j_N}(x)$, puis l'intensité du courant *électrique* $I(x)$ dû à la diffusion de ces particules.

*Solution de l'équation de diffusion en régime variable*

**3. Diffusion d'un profil de concentration sinusoïdal**

On considère la diffusion de particules dans un liquide suivant la direction $(Ox)$, en supposant qu'il n'y a ni production, ni absorption des particules dans le liquide. On note $n^*(x,t)$ la concentration de particules et $D$ le coefficient de diffusion.

Pour certaines conditions initiales, il est possible de chercher une solution de la forme : $n^*(x,t) = n_0^* + f(x)g(t)$ (où $n_0^*$ désigne une constante).

a) Rappeler l'équation de diffusion, et en déduire l'équation :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = D\frac{f''(x)}{f(x)}.$$

b) Justifier que chaque membre de cette équation est nécessairement une constante. Déterminer alors les fonctions $f(x)$ et $g(t)$. On ne cherchera pas à déterminer pour l'instant les constantes d'intégration qui apparaissent dans ces fonctions.

c) On suppose qu'à $t = 0$, la répartition spatiale de concentration est : $n^*(x,0) = n_1^* + n_2^*\sin(px)$ (avec $n_1^*$, $n_2^*$ et $p$ trois constantes). Vérifier que la solution trouvée en b est compatible avec ces conditions initiales, et déterminer entièrement cette solution. Représenter graphiquement la concentration en fonction de $x$ à des instants $t$ différents.

**4. Élargissement d'une tache d'encre**

Un trait d'encre très fin est tracé sur une feuille de papier : il s'élargit progressivement sous l'effet de la diffusion. On étudie cette situation de manière simplifiée en se plaçant dans un modèle unidimensionnel : la concentration des particules de l'encre ne dépend que de l'abscisse $x$ et de l'instant $t$. La feuille a une épaisseur $e$ selon l'axe $(Oz)$, une largeur $l$ selon l'axe $(Oy)$, et une longueur infinie selon l'axe $(Ox)$.

Le nombre total de particules d'encre est noté $N$. À l'instant initial, elles sont supposées infiniment concentrées en $x = 0$, sur la largeur $l$ et l'épaisseur $e$ de la feuille, et leur concentration est nulle partout ailleurs. À un instant quelconque, les conditions aux limites sont : $n^*(+\infty,t) = n^*(-\infty,t) = 0$ car l'encre progresse à vitesse finie.

a) Rappeler sans démonstration l'équation de diffusion unidimensionnelle, dans un milieu sans processus de création ou destruction de particules.

b) Vérifier que la fonction suivante est solution de l'équation de diffusion, et respecte les conditions initiales et aux limites :

$$n^*(x,t) = \frac{A}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

c) Représenter graphiquement cette concentration en fonction de $x$ à deux instants $t$ différents.

d) Déterminer la constante $A$ en fonction de $N$, $l$ et $e$.

e) On définit la largeur $\lambda(t)$ de la tache à un instant $t$ par :

$$n^*\left(\frac{\lambda(t)}{2},t\right) = \frac{n^*(0,t)}{10}.$$

Calculer $\lambda(t)$ et commenter le résultat.

Donnée pour cet exercice : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

---

☞ *Réponses partielles*

**1.** a) Avec $j_n = -D\dfrac{\partial c}{\partial x}$ on établit $\dfrac{\partial c}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}$.

**2.** a) $\dfrac{\partial n^*}{\partial t}(x,t) = D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{\tau}n^*(x,t) + \dfrac{k}{\tau}$.

**3.** c) $n^*(x,t) = n_1^* + n_2^*\exp(-Dp^2t)\sin(px)$.

**4.** d) $A = \dfrac{N}{2le\sqrt{\pi}}$. e) $\lambda(t) = 4\sqrt{Dt\ln 10}$.