Th2 – Corrigé des exercices 1, 3, 4

¤ Exercice 1 (fin)

c) On a établi (voir cours, §2.c) : $\boxed{c(x)=\dfrac{c_2-c_1}{L}x+c_1=-\dfrac{\Delta c}{L}x+c_1}$ d'où $\boxed{j_n=D\dfrac{\Delta c}{L}}$ (indépendant de x).

d) Bilan de quantité de matière pour le récipient 1 entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$: $n_1(t+\mathrm{d}t)-n_1(t)=-\delta n_{\text{sortant de 1}}$

$\Leftrightarrow [c_1(t+\mathrm{d}t)-c_1(t)]V_1=-j_nS\,\mathrm{d}t=-D\dfrac{\Delta c(t)}{L}S\,\mathrm{d}t$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}=-D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_1}S$. Il y a deux fonctions différentes dans l'équation, il nous faut une autre équation. On fait de même un bilan pour le récipient 2 : $n_2(t+\mathrm{d}t)-n_2(t)=+\delta n_{\text{entrant dans 2}}$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}c_2(t)}{\mathrm{d}t}=+D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_2}S$.

Finalement on soustrait membre à membre :

$\dfrac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}c_2(t)}{\mathrm{d}t}=-D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_1}S-D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_2}S$ soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\Delta c(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{DS}{L}\left(\dfrac{1}{V_1}+\dfrac{1}{V_2}\right)\Delta c(t)=0}$ (linéaire d'ordre 1, sans second membre).

e) Solution : $\boxed{\Delta c(t)=\Delta c(0)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$ avec $\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{DS}{L}\left(\dfrac{1}{V_1}+\dfrac{1}{V_2}\right)$ soit $\boxed{\tau=\dfrac{L}{DS}\dfrac{V_1V_2}{V_1+V_2}}$.

¤ Exercice 3

a) $\boxed{\dfrac{\partial n^*}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}}$ (voir cours).

b) On injecte la forme proposée dans l'équation différentielle : $f(x)g'(t)=Df''(x)g(t)$. On divise par $f(x)g(t)$ (non identiquement nulle) : $\dfrac{g'(t)}{g(t)}=D\dfrac{f''(x)}{f(x)}$. Cette grandeur est indépendante de x (d'après le premier membre) et de t (d'après le second), il s'agit donc d'une constante A. On obtient alors deux équations différentielles séparées. La première est $g'(t)=Ag(t)$, dont la solution générale est $g(t)=\lambda\exp(At)$. La concentration ne pouvant pas diverger en l'absence de terme de création, A est nécessairement négative : on note $A=-1/\tau$, d'où $\boxed{g(t)=\lambda\exp(-t/\tau)}$. [On peut toujours prendre $\lambda=1$, puisqu'il y a encore un facteur constant dans $f(x)$.]

La deuxième équation différentielle est alors : $f''(x)+\dfrac{1}{D\tau}f(x)=0$. Solution générale : $\boxed{f(x)=\alpha\cos\left(x/\sqrt{D\tau}\right)+\beta\sin\left(x/\sqrt{D\tau}\right)}$.

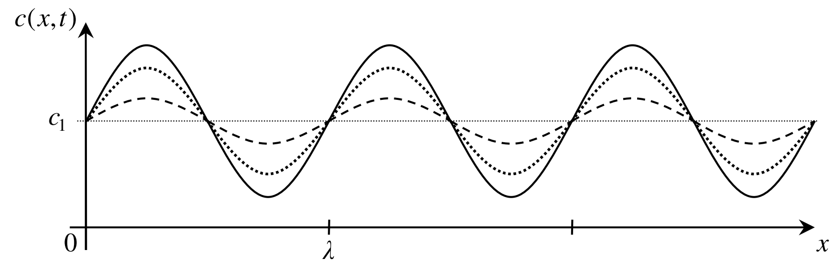
Finalement la concentration est de la forme : $\boxed{n^*(x,t)=n_0^*+\left[\alpha\cos\left(x/\sqrt{D\tau}\right)+\beta\sin\left(x/\sqrt{D\tau}\right)\right]\exp(-t/\tau)}$.

c) À $t=0$, la solution ci-dessus devient : $n^*(x,0)=n_0^*+\alpha\cos\left(x/\sqrt{D\tau}\right)+\beta\sin\left(x/\sqrt{D\tau}\right)$. On peut effectivement identifier cette formule avec la forme donnée, en prenant $\boxed{n_0^*=n_1^*}$, $\boxed{\alpha=0}$, $\boxed{\beta=n_2^*}$ et $1/\sqrt{D\tau}=p$ soit $\boxed{\tau=1/Dp^2}$.

On trouve donc finalement :

$$\boxed{n^*(x,t)=n_1^*+n_2^*\exp(-Dp^2t)\sin(px)}.$$

Il s'agit à tout instant d'une répartition sinusoïdale selon l'axe (Ox), de période spatiale $\lambda=2\pi/p$, autour de la valeur moyenne c_1, avec une amplitude $c_2\exp(-Dp^2t)$ qui décroît au cours du temps.



¤ Exercice 4

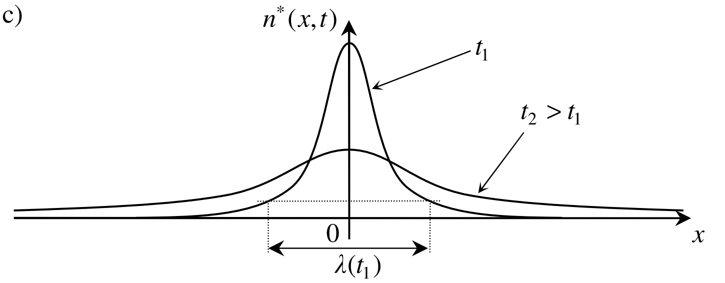
a) Équation de diffusion en l'absence de création/consommation : $\boxed{\dfrac{\partial n^*}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}}$.

b) On trouve bien pour les limites : $\boxed{n^*(x,t)\xrightarrow[t\to 0]{}0,\forall x\neq 0}$, $\boxed{n^*(0,t)\xrightarrow[t\to 0]{}+\infty}$ et $\boxed{n^*(x,t)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0,\forall t}$.

Dérivons cette fonction : $\dfrac{\partial n^*}{\partial t}=-\dfrac{A}{2t^{3/2}\sqrt{D}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)+\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{x^2}{4Dt^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$; $\dfrac{\partial n^*}{\partial x}=-\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{2x}{4Dt}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$

puis $\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}=-\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{2}{4Dt}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)+\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\left(\dfrac{2x}{4Dt}\right)^2\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$. On vérifie donc bien l'équation de diffusion.

c)



La fonction est de plus en plus « étalée », avec un maximum central de moins en moins élevé. L'aire sous la courbe reste constante, car elle est proportionnelle au nombre total de particules (voir question suivante).

d) Population totale : $N=\iiint_{\text{feuille}}n^*(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2leA\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{Dt}}=2leA\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u=2leA\sqrt{\pi}$ donc $\boxed{A=\dfrac{N}{2le\sqrt{\pi}}}$.

e) $n^*\left(\frac{\lambda(t)}{2},t\right)=\frac{n^*(0,t)}{10} \Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{D\,t}}\exp\left(-\frac{\lambda(t)^2}{16D\,t}\right)=\frac{A}{10\sqrt{D\,t}} \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{\lambda(t)^2}{16D\,t}\right)=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{\lambda(t)=4\sqrt{D\,t\ln 10}}$. Comme on l'attendait, la largeur de la tache augmente <u>proportionnellement à la racine carrée de la durée</u> (et à celle du coefficient de diffusion).