Exercices du chapitre Th3

Bilans et solutions stationnaires

1. Barreau conducteur non isolé

Un barreau cylindrique d'axe (Ox), de longueur L et de rayon R, est constitué d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. Le barreau est suffisamment mince pour que la température T soit uniforme dans toute section, donc qu'elle ne dépende que de x et de t.

La surface latérale du barreau n'étant pas isolée de l'air extérieur, de température T_0, le barreau échange avec lui une puissance thermique *par unité de surface* égale à :

$$\varphi(x,t) = -h[T(x,t) - T_0] \text{ (formule de Newton)}$$

où h est le coefficient d'échange thermique, positif.

a) Quelle est l'unité SI du paramètre h ?

b) Établir soigneusement l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $T(x,t)$.

Les températures aux deux extrémités sont maintenues aux valeurs constantes $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$: il s'établit alors un régime stationnaire dans le barreau.

c) Déterminer complètement la fonction $T(x)$. Simplifier cette expression dans le cas d'une longueur L très grande (critère à préciser).

2. Diffusion radiale dans un matériau fissile

Un « crayon » de matière fissile (oxyde d'uranium enrichi) a la forme d'un cylindre d'axe (Oz), de rayon $R = 7{,}0$ mm et de longueur $L = 3{,}9$ m. La conductivité thermique de ce matériau est $\lambda = 3{,}7\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ dans les conditions d'utilisation. Une réaction de fission nucléaire, dans tout le volume du matériau, entraîne une diminution de son énergie de masse, équivalente à une « source d'énergie thermique » de puissance volumique uniforme $p_\mathrm{v} = 200\ \mathrm{MW\cdot m^{-3}}$.

On se place en régime permanent. Dans ce crayon, la température varie alors uniquement en fonction de la distance r à l'axe (approximation du cylindre infini), soit une fonction $T(r)$ en coordonnées cylindriques. Le crayon est entouré d'eau à la température $T_\mathrm{e} = 600$ K ; la surface extérieure du crayon est alors à la même température.

On donne les expressions du gradient et du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \ ;$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

a) Quelle est ici la forme correcte du vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_Q}$, parmi les expressions suivantes ?

$$\overrightarrow{j_Q} = j_{Qr}\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{j_Q} = j_{Q\theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{j_Q} = j_{Qz}\overrightarrow{e_z}$$

b) Faire un bilan d'énergie sur un cylindre d'axe (Oz), de longueur L et de rayon r, sachant qu'on peut négliger les flux thermiques aux deux extrémités par rapport au flux latéral.

À l'aide de la loi de Fourier, en déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $T(r)$.

c) Résoudre cette équation différentielle.

d) Montrer qu'on peut retrouver la fonction $T(r)$ à partir de l'équation de la chaleur générale (tridimensionnelle).

e) Calculer la température maximale dans le cylindre. Y a-t-il un risque que le matériau atteigne sa température de fusion $T_\mathrm{f} = 3140$ K ?

Résistance thermique

3. Chauffage et isolation d'une maison

On souhaite maintenir la température d'une maison à la valeur constante $\theta = 20$ °C, la température extérieure étant $\theta_\mathrm{e} = 10$ °C. La résistance thermique des quatre murs et du sol est $R_{\mathrm{th},1} = 1{,}0\cdot 10^{-2}\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$, celle du plafond et du toit est $R_{\mathrm{th},2} = 2{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

a) Ces deux résistances sont-elles en série, en parallèle, ou ni l'un ni l'autre ?

b) Calculer la puissance que doit fournir le chauffage pour maintenir la température constante.

c) Pour diminuer la puissance de chauffage nécessaire, on ajoute une plaque de matériau isolant entre le plafond et le toit. Calculer la résistance thermique que doit avoir cette plaque pour réaliser une économie de 50 %.

Solution de l'équation de diffusion en régime variable

4. Variations de température du sol

Les variations de température de l'air, au cours d'une journée, entraînent des variations de température dans le sol, qui dépendent de la profondeur.

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$, et le sol le demi-espace $x > 0$: la coordonnée x représente donc la *profondeur*. La température de l'air et du sol en $x = 0$ est de la forme $T(0,t) = T_0 + a\cos(\omega t)$. Pour faciliter les calculs, on utilisera la notation complexe : $\underline{T}(0,t) = T_0 + a\exp(j\omega t)$.

La masse volumique du sol est $\rho = 3{,}0\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, sa conductivité thermique est $\lambda = 1{,}2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et sa capacité thermique $c = 515\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. On posera $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c\omega}}$, et on rappelle que $(1+j)^2 = 2j$.

a) Établir l'équation de diffusion thermique dans le sol.

b) On cherche une solution complexe de la forme :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{b}(x)\exp(j\omega t).$$

Déterminer l'amplitude complexe $\underline{b}(x)$.

c) En déduire l'expression de la température réelle $T(x,t)$.

d) En hiver, on suppose que la variation journalière de température en $x = 0$ est d'amplitude 15 °C autour d'une valeur moyenne de 3 °C. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm : le sol gèle-t-il à cette profondeur ?

☞ *Réponses partielles*

1. a) $\rho c R\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = R\lambda\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - 2h\left[T(x,t) - T_0\right]$. **2.** b) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{p_\mathrm{v} r}{2\lambda}$.

3. b) $\mathcal{P} = 6{,}0$ kW. **4.** b). $\underline{b}(x) = a\exp\left(-(1+j)\dfrac{x}{\delta}\right)$.