Th3 – Corrigé des exercices 2, 3 et 4

¤ Exercice 2

a) La température ne dépend que de r, donc $\boxed{\overrightarrow{j_Q} = j_{Qr}\overrightarrow{e_r} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r}}$ (loi de Fourier).

b) Bilan en régime permanent (ou stationnaire) : $0 = -\Phi_{\text{th,sortant}}\,\mathrm{d}t + p_\text{v} V\,\mathrm{d}t = -\left(\iint_\text{cylindre} j_{Qr}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t + p_\text{v}\pi r^2 L\,\mathrm{d}t$

$= -j_{Qr}2\pi r L\,\mathrm{d}t + p_\text{v}\pi r^2 L\,\mathrm{d}t$ d'où $j_{Qr} = \frac{p_\text{v} r}{2}$. Sachant que $j_{Qr} = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$, il vient $\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{p_\text{v} r}{2\lambda}}$.

c) Solution : $T(r) = -\frac{p_\text{v} r^2}{4\lambda} + A$. Condition aux limites : $T(R) = -\frac{p_\text{v} R^2}{4\lambda} + A = T_\text{e}$ d'où $A = T_\text{e} + \frac{p_\text{v} R^2}{4\lambda}$ et $\boxed{T(r) = T_\text{e} + \frac{p_\text{v}(R^2 - r^2)}{4\lambda}}$.

d) Équation de la chaleur générale : $\rho c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda\Delta T + p_\text{v}$. En régime stationnaire : $\Delta T = -\frac{p_\text{v}}{\lambda}$. On utilise la formule du laplacien en cylindriques, sachant que T ne dépend que de r : $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{p_\text{v}}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{p_\text{v}}{\lambda}r$. On intègre une première fois : $r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{p_\text{v}}{2\lambda}r^2 + A$, d'où $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{p_\text{v}}{2\lambda}r + \frac{A}{r}$. Nécessairement $A = 0$ car $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ ne peut pas diverger en $r = 0$ (sur l'axe), sinon la densité de flux serait infinie (d'après la loi de Fourier).

On intègre une deuxième fois : $T(r) = -\frac{p_\text{v}}{4\lambda}r^2 + B$. Et on obtient alors B comme à la question c.

e) $\boxed{T_\text{max} = T(0) = T_\text{e} + \frac{p_\text{v}}{4\lambda}R^2}$. AN $\boxed{T_\text{max} = 1260\ \text{K}}$: c'est largement inférieur à $T_\text{f} = 3140\ \text{K}$ donc il n'y a pas de risque de fusion.

¤ Exercice 3

a) Ces deux résistances sont placées entre les deux mêmes systèmes (l'intérieur de la maison à la température θ et l'extérieur à la température θ_e) : elles sont donc en parallèle.

b) Premier principe pour la maison pendant Δt, en régime permanent (isobare) : $\Delta H = Q$

$\Leftrightarrow 0 = +\mathcal{P}\Delta t + \frac{\theta_\text{e} - \theta}{R_\text{th,éq}}\Delta t = +\mathcal{P}\Delta t + (\theta_\text{e} - \theta)\left(\frac{1}{R_\text{th,1}} + \frac{1}{R_\text{th,2}}\right)\Delta t$ d'où $\boxed{\mathcal{P} = (\theta - \theta_\text{e})\left(\frac{1}{R_\text{th,1}} + \frac{1}{R_\text{th,2}}\right)}$. AN $\boxed{\mathcal{P} = 6{,}0\ \text{kW}}$.

c) On ajoute cette fois une nouvelle résistance $R_\text{th,3}$ en série avec celle du toit : le calcul précédent devient donc :

$\frac{\mathcal{P}}{2} = (\theta - \theta_\text{e})\left(\frac{1}{R_\text{th,1}} + \frac{1}{R_\text{th,2} + R_\text{th,3}}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2R_\text{th,1}} + \frac{1}{2R_\text{th,2}} = \frac{1}{R_\text{th,1}} + \frac{1}{R_\text{th,2} + R_\text{th,3}} \Leftrightarrow \boxed{R_\text{th,3} = \frac{2R_\text{th,1}R_\text{th,2}}{R_\text{th,1} - R_\text{th,2}} - R_\text{th,2}}$. AN $\boxed{R_\text{th,3} = 3{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}}$.

¤ Exercice 4

a) Équation de diffusion unidimensionnelle, sans terme de « source » : $\boxed{\rho c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}}$ (voir cours).

b) On injecte la solution proposée $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{b}(x)\exp(j\omega t)$ dans l'équation aux dérivées partielles :

$\rho c j\omega\underline{b}(x)\exp(j\omega t) = \lambda\frac{\mathrm{d}^2\underline{b}(x)}{\mathrm{d}x^2}\exp(j\omega t)$ soit après simplification $\frac{\mathrm{d}^2\underline{b}(x)}{\mathrm{d}x^2} - j\frac{\rho c\omega}{\lambda}\underline{b}(x) = 0$. Équation caractéristique : $\underline{r}^2 - j\frac{\rho c\omega}{\lambda} = 0$

soit $\underline{r}^2 = 2j\frac{\rho c\omega}{2\lambda} = \frac{(1+j)^2}{\delta^2}$ donc $\underline{r} = \pm\frac{1+j}{\delta}$. La solution générale est donc de la forme :

$\underline{b}(x) = a\exp\left(-(1+j)\frac{x}{\delta}\right) + c\exp\left(+(1+j)\frac{x}{\delta}\right) = a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right) + c\exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(+j\frac{x}{\delta}\right)$.

Or le milieu est semi-infini vers les x croissants, le second terme divergerait, ce qui est impossible, donc $c = 0$. Il reste finalement :

$\boxed{\underline{b}(x) = a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right)}$.

c) Donc $\underline{T}(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right)\exp(j\omega t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$. On en prend la partie réelle pour obtenir

$\boxed{T(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$.

d) On nous donne $\theta_0 = 3\ °\text{C}$, soit $T_0 = 276\ \text{K}$, et $a = 15\ °\text{C} = 15\ \text{K}$. À une profondeur $x = 50\ \text{cm}$, l'amplitude des variations, toujours autour de T_0, est $a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 0{,}49\ °\text{C} = 0{,}49\ \text{K}$, donc la température varie entre 2,5 °C et 3,5 °C : il ne gèle pas.