Corrigé du devoir d'entraînement de physique nº 2

¤ Problème A

1.1) Loi de Fourier : $\boxed{\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T}$. Unités SI : j_Q en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, T en K, λ en $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

1.2) Premier principe pour une tranche entre x et $x + \mathrm{d}x$, entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}U(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}U(t) = +\,\delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}}$

$\Leftrightarrow \rho S\,\mathrm{d}x c[T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)] = +j_Q(x,t) S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t) S\,\mathrm{d}t$ d'où en divisant par $S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$: $\boxed{\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}}$. La loi de Fourier s'écrivant ici $j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$, on obtient : $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$ avec la diffusivité thermique $\boxed{D = \dfrac{\lambda}{\rho c}}$.

1.3) D s'exprime en $\boxed{\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}}$ (comme la diffusivité dans les autres phénomènes analogues).

1.4) Le transfert thermique s'effectue de la zone de température plus élevée vers celle de température plus faible, donc <u>dans le sens des x croissants</u>.

1.5) En régime permanent (ou stationnaire) : $\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0$ donc $T(x) = Ax + B$. Conditions aux limites : $T(0) = T_1 = B$ et $T(\ell) = T_2 = A\cdot\ell + T_1$ donc $\boxed{T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1}$.

1.6) Par définition : $\boxed{R_{\text{th}} = \dfrac{T_1 - T_2}{\Phi_{1\to 2}}}$ avec $\Phi_{1\to 2}$ le flux thermique (puissance thermique) de 1 vers 2. Unité SI : $\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

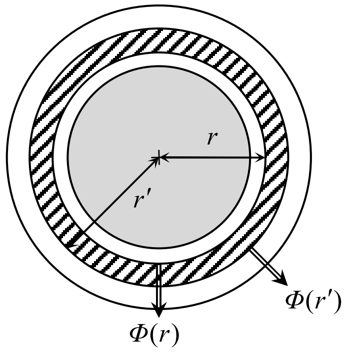
Or $\Phi_{1\to 2} = \displaystyle\iint_S \overrightarrow{j_Q}\cdot\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}s = j_Q S = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S = -\lambda \dfrac{T_2 - T_1}{\ell} S$ donc $\boxed{R_{\text{th}} = \dfrac{\ell}{\lambda S}}$. Conductance thermique : $\boxed{G_{\text{th}} = \dfrac{1}{R_{\text{th}}} = \dfrac{\lambda S}{\ell}}$.

1.7) Ce système est à <u>symétrie sphérique</u> (invariance par toute rotation autour du centre) donc T ne dépend que de r : $\boxed{\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \overrightarrow{e_r}}$.

Puisque T décroît vers l'extérieur (de T_{i} à T_{e}), $\overrightarrow{j_Q}$ est <u>dirigé selon un rayon de la sphère</u> et <u>orienté vers l'extérieur</u>.

1.8) $\Phi(r) = \displaystyle\oiint_S \overrightarrow{j_Q}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s = -\oiint_S \lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \oiint_S \mathrm{d}s$ soit $\boxed{\Phi(r) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 4\pi r^2}$.

1.9) Effectuons un bilan d'énergie, entre deux instants t et $t + \Delta t$, pour un système constitué d'une portion de plumage comprise entre deux rayons différents quelconques r et r' (le système est hachuré sur le schéma). Puisqu'il n'y a pas de source interne au plumage, les seules causes de variation possible de l'énergie de ce système sont les flux thermiques sur les deux surfaces ; et comme la notation $\Phi(r)$ signifie un flux *sortant* d'une sphère de rayon r, c'est-à-dire orienté vers l'extérieur, on doit compter positivement le flux $\Phi(r)$, qui entre dans le système donc tend à faire augmenter son énergie, et négativement le flux $\Phi(r')$, qui en sort. Ainsi le bilan s'écrit, en régime stationnaire : $0 = +\Phi(r)\Delta t - \Phi(r')\Delta t$, d'où $\boxed{\Phi(r) = \Phi(r')}$, c'est-à-dire que le flux est le même pour tout r ; on le notera donc simplement Φ.



1.10) La résistance thermique du plumage est $R_{\text{th}} = \dfrac{T_{\text{i}} - T_{\text{e}}}{\Phi}$, sa conductance thermique est $G_{\text{th}} = \dfrac{\Phi}{T_{\text{i}} - T_{\text{e}}}$.

On intègre la formule trouvée à la question **1.8** : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi}{4\pi\lambda r^2}$ d'où $T(r) = +\dfrac{\Phi}{4\pi\lambda r} + C$. Conditions aux limites : $T(R) = T_{\text{i}} = \dfrac{\Phi}{4\pi\lambda R} + C$ et $T(R+e) = T_{\text{e}} = \dfrac{\Phi}{4\pi\lambda(R+e)} + C$. En soustrayant membre à membre on élimine alors la constante inconnue : $T_{\text{i}} - T_{\text{e}} = \dfrac{\Phi}{4\pi\lambda}\times\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+e}\right) = \dfrac{\Phi}{4\pi\lambda}\times\dfrac{e}{R(R+e)}$ d'où on tire $\boxed{G_{\text{th}} = 4\pi\lambda \dfrac{R(R+e)}{e}}$. On a donc trouvé le coefficient $\boxed{\alpha = 4\pi}$.

1.11) Si $e \ll R$ on obtient approximativement $G_{\text{th}} = 4\pi\lambda \dfrac{R^2}{e}$. Or le produit $4\pi R^2$ est la surface de la sphère de rayon R, donc on a bien obtenu $\boxed{G_{\text{th}} = \lambda \dfrac{S}{e}}$. (C'est la même formule que pour un conducteur thermique plan.)

2.1) La résistance au froid correspond à la capacité à maintenir constante la température T_{i} du corps : pour cela le métabolisme de l'animal doit fournir une quantité d'énergie égale à celle qui est perdue par transfert thermique, qui est proportionnelle à G_{th}. Or cette énergie est libérée dans le volume du corps, et on peut estimer qu'elle est grossièrement proportionnelle à la masse de l'animal. Ainsi, $G_m = G_{\text{th}}/m$ donne un rapport entre l'énergie perdue et l'énergie reçue : <u>plus ce paramètre est faible, plus l'animal peut résister au froid</u>.

2.2) En géométrie sphérique, la masse est $m = \rho\times V = \rho \dfrac{4\pi}{3} R^3$, donc $\boxed{G_m = \dfrac{3\lambda(R+e)}{\rho R^2 e}}$. Avec l'approximation $e \ll R$: $\boxed{G_m = \dfrac{3\lambda}{\rho R e}}$.

2.3) Dans la formule ci-dessus pour la masse, on isole R : $\boxed{R = \left(\dfrac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}}$. AN $\boxed{R_1 = 7{,}8\ \mathrm{cm}}$; $\boxed{R_2 = 1{,}3\ \mathrm{cm}}$.

2.4) L'épaisseur e indiquée n'est pas négligeable devant le rayon corporel de ces oiseaux : on gardera donc la première expression, plus précise, de G_m. Le rapport est alors : $x = \dfrac{G_{m1}}{G_{m2}} = \dfrac{3\lambda(R_1+e)}{\rho R_1^2 e}\dfrac{\rho R_2^2 e}{3\lambda(R_2+e)}$ soit $\boxed{x = \dfrac{G_{m1}}{G_{m2}} = \dfrac{R_2^2(R_1+e)}{R_1^2(R_2+e)}}$. AN $\boxed{x = 0{,}11}$.

2.5) Dans le modèle sphérique, la surface corporelle est proportionnelle à R^2 (expression exacte $S = 4\pi R^2$). Or nous avons vu ci-dessus que le rayon R est proportionnel à $m^{1/3}$, donc S est proportionnelle à $\boxed{m^{2/3}}$.

2.6) D'après le calcul de la question **2.4**, l'oiseau de 2 kg a une capacité de résistance au froid environ neuf fois plus grande que celle de l'oiseau de 10 g, c'est-à-dire qu'il peut supporter un écart de température neuf fois plus élevé.
Plus généralement, lorsque la taille d'un oiseau augmente, sa production de chaleur augmente proportionnellement à m, tandis que ses pertes thermiques augmentent proportionnellement à sa surface corporelle donc seulement à $m^{2/3}$. Ainsi, pour une même épaisseur de plumage, les oiseaux les plus grands sont ceux qui résistent le mieux au froid.

2.7) L'étude précédente ayant été faite à épaisseur de plumage constante, il s'agit maintenant d'examiner cette hypothèse. Pour comparer les épaisseurs de plumage, les données intéressantes sont celles des grandeurs par unité de surface corporelle : nombre de plumes et masse de plumage.
Tout d'abord, pour des oiseaux de plus en plus petits, le nombre de plumes par unité de surface augmente fortement (de 4,6 à 31 par cm^2), donc le plumage est de plus en plus épais : ceci peut compenser l'effet de la taille étudié précédemment.
Par ailleurs, pour des oiseaux de plus en plus petits, la masse de plumes par unité de surface diminue (de 42 à 13 mg par cm^2). On peut en déduire que la nature des plumes change : les petits oiseaux ont des plumes plus légères, plutôt sous forme de duvet, c'est-à-dire qu'elles enferment beaucoup d'air, ce qui contribue aussi à une meilleure isolation thermique (l'air étant un mauvais conducteur thermique : c'est aussi le principe à la base des doubles vitrages).

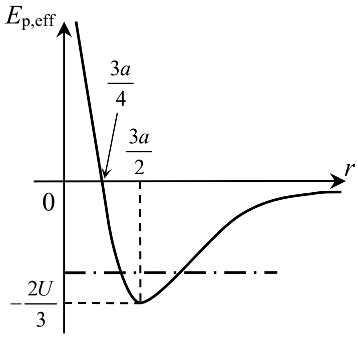
¤ Problème B

1. E_p est définie par : $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = -\dfrac{2U}{a}\left(\dfrac{a^3}{r^3}-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\vec{e_r}\cdot\left(\mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_\varphi}\right) = -\dfrac{2U}{a}\left(\dfrac{a^3}{r^3}-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\mathrm{d}r$. On intègre : $E_\mathrm{p}(r) = U\left(\dfrac{a^2}{r^2}-\dfrac{2a}{r}\right) + \text{cte}$. Si on choisit $E_\mathrm{p}(\infty)=0$, la constante est nulle, soit $\boxed{E_\mathrm{p}(r) = U\left(\dfrac{a^2}{r^2}-\dfrac{2a}{r}\right)}$.

2. Théorème du moment cinétique pour P, en O dans $\mathfrak{R}$ terrestre galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OP}\wedge\vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{F}//\overrightarrow{OP}$, donc $\boxed{\vec{L} = \overrightarrow{\text{cte}}}$. À $t=0$: $\vec{L} = m\overrightarrow{OP_0}\wedge\vec{v_0} = -m\,a\,\vec{e_x}\wedge v_0\,\vec{e_y}$ soit $\boxed{\vec{L} = -m\,a\,v_0\,\vec{e_z}}$. Or $\vec{L} = m\overrightarrow{OP}\wedge\vec{v}(P)_\mathfrak{R} \perp \overrightarrow{OP}$ donc $\overrightarrow{OP}\perp\vec{e_z}, \forall t$: le mouvement de P a lieu dans le plan (Oxy). Alors en coordonnées polaires : $\vec{L} = m\,r\,\vec{e_r}\wedge\left(\dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\right)$ soit $\boxed{\vec{L} = m\,r^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}}$ (donc $r^2\dot{\theta} = -a v_0$).

3. La seule force exercée sur P est conservative, donc son énergie mécanique E est constante.
Expression générale : $E = \dfrac{1}{2}m v^2 + U\left(\dfrac{a^2}{r^2}-\dfrac{2a}{r}\right)$. À $t=0$: $E = \dfrac{1}{2}m\dfrac{U}{m} + U\left(\dfrac{a^2}{a^2}-\dfrac{2a}{a}\right)$ soit $\boxed{E = -\dfrac{U}{2}}$.

4. $E = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}(r) = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_\mathrm{p}(r)$, or $\dot{\theta} = -\dfrac{a v_0}{r^2}$ donc $E = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\mathrm{peff}(r)$
avec $E_\mathrm{p,eff}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{a^2 v_0^2}{r^2} + E_\mathrm{p}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{a^2}{r^2}\dfrac{U}{m} + U\left(\dfrac{a^2}{r^2}-\dfrac{2a}{r}\right)$ soit $\boxed{E_\mathrm{p,eff}(r) = U\left(\dfrac{3a^2}{2r^2}-\dfrac{2a}{r}\right)}$
(énergie potentielle effective).



$E_\mathrm{p,eff}(0)\to+\infty$, $E_\mathrm{p,eff}(\infty)\to 0$. $E_\mathrm{p,eff}$ s'annule pour $r = \dfrac{3a}{4}$, et a un extremum (minimum) pour $-\dfrac{3a^2}{r^3}+\dfrac{2a}{r^2} = 0$ soit $r = \dfrac{3a}{2}$: alors $E_\mathrm{p,eff} = -\dfrac{2U}{3}$.

5. $E - E_\mathrm{p,eff}(r) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ donc les valeurs de r accessibles sont celles qui vérifient $E_\mathrm{p,eff}(r) \leq E = -\dfrac{U}{2}$. D'après le graphe, cela correspond à $\boxed{r_\mathrm{min} \leq r \leq r_\mathrm{max}}$, donc la particule ne peut pas aller à l'infini. Les deux valeurs extrêmes sont données par : $E_\mathrm{p,eff}(r) = -\dfrac{U}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3a^2}{2r^2}-\dfrac{2a}{r} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow r^2 - 4ar + 3a^2 = 0$, dont les racines sont $\boxed{r_\mathrm{min} = a}$ et $\boxed{r_\mathrm{max} = 3a}$.

¤ Problème C

1.a) Forces appliquées au solide de masse m, assimilé à G : poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$; réaction normale de l'axe $\vec{R} = R_y\vec{e_y} + R_z\vec{e_z}$; tension du ressort $\vec{T} = -k(EG-\ell_0)\vec{e_x} = -kx\,\vec{e_x}$ (la longueur à l'équilibre ℓ_0 étant la longueur à vide) ; force de frottement fluide $\vec{F} = -\beta\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{EG}}{\mathrm{d}t} = -\beta\dot{x}\vec{e_x}$. PFD pour G dans R galiléen : $m\vec{a}(G)_R = \vec{P}+\vec{R}+\vec{T}+\vec{F}$. Projection : $m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$ soit $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$.

1.b) Équation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$. Discriminant : $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$. On suppose le régime pseudo-périodique, soit $\Delta < 0$: alors $r = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\omega'$. La solution est donc $x(t) = \exp(-\lambda t)[A\cos\omega' t + B\sin\omega' t]$. Conditions initiales : $x(0) = x_0 = A$; $\dot{x}(0) = 0 = -\lambda A + \omega' B$ donc $B = \dfrac{\lambda x_0}{\omega'}$. Finalement : $\boxed{x(t) = x_0\exp(-\lambda t)\left[\cos\omega' t + \dfrac{\lambda}{\omega'}\sin\omega' t\right]}$.

1.c) Le mobile passe $N = 10$ fois par l'équilibre, *dans le même sens*, donc $\Delta t = NT = \dfrac{2N\pi}{\omega'}$ d'où $\boxed{\omega' = \dfrac{2N\pi}{\Delta t}}$. AN $\boxed{\omega' = 5,2\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$.

L'amplitude de la dixième oscillation est $x_1 = x_0 \exp\left(-\lambda\,\Delta t\right)$ donc $\lambda = \dfrac{1}{\Delta t}\ln\dfrac{x_0}{x_1}$ d'où $\boxed{\beta = \dfrac{2\,m}{\Delta t}\ln\dfrac{x_0}{x_1}}$. AN $\boxed{\beta = 4,8\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}$.

Et $\omega_0^2 = \omega'^2 + \lambda^2 = \dfrac{k}{m}$ donc $\boxed{k = m\left(\omega'^2 + \dfrac{\beta^2}{4m^2}\right)}$. AN $\boxed{k = 2,7\ \mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}}$.

2.a) L'abscisse x est toujours déterminée par référence au point E, donc on raisonne toujours dans le référentiel d'origine E. Mais maintenant ce référentiel R' est en translation rectiligne *non uniforme* dans R : R' n'est donc pas galiléen. Le PFD devient alors : $m\vec{a}(G)_{R'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ie}}}$ avec la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{\mathrm{ie}}} = -m\,\vec{a_{\mathrm{e}}} = -m\,\vec{a}(E)_R = +m\,\omega^2 a\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$. (Il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis car il n'y a pas de rotation.) Les expressions des autres forces restent inchangées. Projection sur $\overrightarrow{e_x}$: $m\,\ddot{x} = -k\,x - \beta\,\dot{x} + m\,\omega^2 a\cos(\omega t)$ soit $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 a\cos(\omega t)}$. (On peut aussi raisonner dans R, avec $\vec{a}(G)_R = (\ddot{x} + \ddot{x}_E)\,\overrightarrow{e_x}$.)

2.b) En régime sinusoïdal forcé : $x(t) = X_0\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left[\underline{X}\,e^{j\omega t}\right]$ avec $\underline{X} = X_0 e^{j\varphi}$. Alors $-\omega^2\underline{X} + 2\lambda\, j\omega\,\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = \omega^2 a$ d'où $\underline{X} = \dfrac{\omega^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda\, j\omega} = \dfrac{-j\,\frac{\omega a}{2\lambda}}{1 + j\,\frac{\omega_0}{2\lambda}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$. On obtient donc $\boxed{X_0 = \dfrac{\omega^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}}$ et $\boxed{\varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left[\dfrac{\omega_0}{2\lambda}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}$.

2.c) Le maximum correspond à la <u>résonance en élongation</u> : elle n'a lieu que pour les <u>faibles amortissements</u> $\left(\lambda < \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}\right)$.

Pour $\omega = 7\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$: $u = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 1,3$; on lit alors $y = 1,6 = \dfrac{X_0}{a}$ d'où $\boxed{a = \dfrac{X_0}{y} = 0,12\ \mathrm{m}}$.

2.d) $\mathcal{P} = \langle \vec{F}\cdot\overrightarrow{V_{R'}}\rangle = \langle -\beta\,V_{R'}^2\rangle = -\beta\langle X_0^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle$ soit $\boxed{\mathcal{P} = -\dfrac{1}{2}\beta X_0^2\omega^2}$. AN $\boxed{\mathcal{P} = -4,7\ \mathrm{mW}}$.