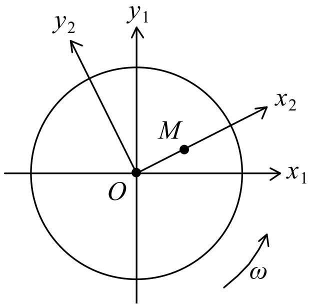
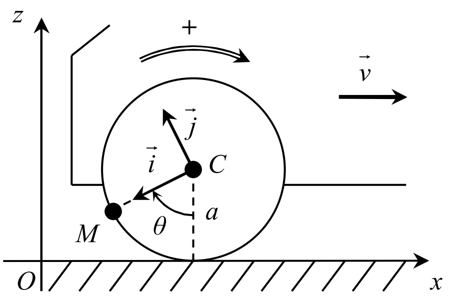
Exercices du chapitre Mc1

Cinématique du changement de référentiel

1. Mouvement radial sur un plateau tournant
Un plateau horizontal tourne avec une vitesse angulaire ω constante, autour d'un axe vertical (Oz_1) fixe par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_1$. On notera $\mathcal{R}_2$ le référentiel lié au plateau ; les axes (Oz_1) et (Oz_2) sont confondus.
Une petite fourmi M décrit à vitesse constante $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2} = v\,\overrightarrow{e_{x2}}$ l'axe (Ox_2) du référentiel $\mathcal{R}_2$. Exprimer $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_1}$ et $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_1}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_{x2}}, \overrightarrow{e_{y2}}\right)$.



2. Mouvement d'un caillou sur un pneu
Madame Michu roule en voiture sur une route rectiligne, selon l'axe (Ox) et vers les x croissants, à une vitesse v constante.
On note $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre lié au repère $Oxyz$.
À un instant $t = 0$, elle roule sur un caillou M qui se trouvait au point O, et ce caillou se coince alors dans le pneu de l'une des roues, de centre C et de rayon extérieur a. On cherche à déterminer la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$. Pour cela, on introduit un second référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la voiture, donc au repère $Cxyz$.



a) La roue roulant sans glisser sur la route, de quelle distance dx avance la voiture sur le sol lorsque la roue tourne d'un angle dθ ? En déduire la relation entre v et $\dot{\theta}$.
b) Déterminer l'angle $\theta(t)$ entre la verticale descendante et le rayon [CM], en prenant $\theta(0)=0$.
c) Quel est le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$? Quel est le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$?
d) Déterminer, avec les lois de composition, les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathcal{R}$ en fonction du temps. On pourra utiliser comme intermédiaire la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \overrightarrow{e_y}\right)$ telle que $\overrightarrow{CM} = a\,\vec{i}$.
e) Déterminer les équations paramétriques $x\,(t)$ et $z\,(t)$ de la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$. Représenter cette trajectoire sur un schéma (cette courbe s'appelle une cycloïde).
f) Après quelques tours, le caillou se détache de la roue : part-il vers l'avant ou vers l'arrière (par rapport au sol) ?

Dynamique en référentiel non galiléen

3. Toto en impesanteur
Le petit Toto se trouve dans un ascenseur de masse M, avec une balle de masse m dans la main. Soudain, les câbles de l'ascenseur se rompent, et il se retrouve en chute libre (par rapport au référentiel terrestre) : Toto lâche alors la balle.
a) On suppose tout d'abord que cette chute libre de l'ascenseur a lieu sans frottements. Quelle est son accélération ? Déterminer alors le mouvement de la balle dans le référentiel de l'ascenseur.
b) En réalité il y a des frottements entre l'ascenseur et l'extérieur. Comment se modifient alors les résultats précédents ?

4. Pendule en référentiel non galiléen
Un pendule simple (fil idéal inextensible de longueur ℓ et point matériel M de masse m) est fixé au plafond d'un véhicule, en un point O (origine du repère).
a) Le véhicule est en translation rectiligne horizontale, d'accélération constante a, par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) : le pendule est alors en équilibre par rapport au véhicule, le fil faisant un angle β avec la verticale.
Déterminer β, en appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au véhicule.

b) Le véhicule est maintenant un manège en rotation uniforme, avec la vitesse angulaire ω, autour de l'axe vertical (Oz) fixe (par rapport au référentiel terrestre toujours). Le pendule est alors à nouveau en équilibre par rapport au véhicule, avec un angle β par rapport à la verticale. Déterminer β ; on montrera qu'il existe une vitesse angulaire critique ω_c au-dessous de laquelle le fil reste vertical.
c) Dans le cas de la rotation, déterminer l'énergie potentielle totale E_p du point M dans le référentiel tournant. En déduire les positions d'équilibre (angle β avec la verticale descendante) en fonction de ω, et retrouver le résultat de la question précédente. La position non verticale, lorsqu'elle existe, est-elle stable ?
d) On se propose d'étudier maintenant la stabilité de la position verticale ($\beta = 0$). Pour cela, déterminer l'expression approchée de E_p pour les faibles valeurs de β.
Tracer l'allure de la courbe donnant E_p en fonction de β au voisinage de 0, en distinguant deux cas selon la valeur de ω ; en déduire la stabilité de cette position d'équilibre.
e) Résumer les résultats précédents sur un graphique donnant les angles β d'équilibre en fonction de ω ; indiquer sur chaque partie de la courbe le caractère stable ou instable.

5. Chute libre dans un référentiel tournant
Toto est sur un manège tournant à la vitesse angulaire constante ω, autour d'un axe vertical (Oz) fixe. Il est assis sur un siège surélevé, situé au-dessus de l'axe (Ox) à une hauteur h par rapport au plancher, et distant de r_0 de l'axe de rotation. À l'instant initial, une bille s'échappe de sa poche.
a) Déterminer les équations différentielles vérifiées par les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la bille dans le référentiel lié au manège, en négligeant tout frottement.
b) Déterminer la solution $z(t)$.
c) Pour résoudre les deux équations différentielles couplées, on introduit la variable complexe $u = x + i\,y$. Établir l'équation différentielle complexe vérifiée par $u(t)$ et la résoudre. En déduire $x(t)$ et $y(t)$.
d) Déterminer les coordonnées du point où la bille touche le plancher du manège.
AN $\omega = 1{,}0$ rad·s^{-1} ; $g = 9{,}8$ m·s^{-2} ; $h = 1{,}5$ m ; $r_0 = 5{,}0$ m.
e) On raisonne maintenant dans le référentiel terrestre, lié au repère ($Ox_1y_1z_1$) ; (Oz_1) est confondu avec (Oz) à tout instant, et (Ox_1) coïncide avec (Ox) à $t = 0$. Déterminer dans ce repère les équations horaires de la bille et les coordonnées de son point de chute, ainsi que l'angle dont a tourné le manège à l'instant τ où la bille touche le plancher. Vérifier la cohérence des résultats dans les deux référentiels, en faisant un schéma complet du plan horizontal à l'instant τ.

☞ *Réponses partielles*

1. $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_1} = v\,\overrightarrow{e_{x2}} + \omega\, x_2\,\overrightarrow{e_{y2}}$; $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_1} = 2\,\omega\, v\,\overrightarrow{e_{y2}} - \omega^2 x_2\,\overrightarrow{e_{x2}}$.

2. a) $v = a\,\dot{\theta}$. d) $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)\overrightarrow{e_x} + v\sin\dfrac{vt}{a}\,\overrightarrow{e_z}$;

$\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \dfrac{v^2}{a}\left(\sin\dfrac{vt}{a}\,\overrightarrow{e_x} + \cos\dfrac{vt}{a}\,\overrightarrow{e_z}\right)$.

4. b) $\omega_{\mathrm{c}} = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$. d) $E_{\mathrm{p}} \approx \dfrac{m\,\ell}{2}(g-\ell\,\omega^2)\beta^2 + \mathrm{cte}$.

5. a) $m\,\ddot{x} - m\,\omega^2 x = +2\,m\,\omega\,\dot{y}$; $m\,\ddot{y} - m\,\omega^2 y = -2\,m\,\omega\,\dot{x}$; $\ddot{z} = -g$.

b) $z(t) = h - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$.

c) $x(t) = r_0\,(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t)$; $y(t) = r_0\,(\omega t\cos\omega t - \sin\omega t)$.