Mc2. Cinématique des fluides

1. Outils de description d'un fluide en mouvement
a) Notions fondamentales

b) Dérivées d'une grandeur

Parties traitées en classe (sauf dernière phrase à ajouter pour l'écoulement incompressible)

2. Conservation de la masse
a) Débits massique et volumique

b) Conservation de la masse

c) Écoulements particuliers

- Écoulement stationnaire
- Écoulement incompressible

Le caractère incompressible d'un écoulement *ne dépend pas du référentiel.*

3. Éléments cinématiques
a) Champ des accélérations

- Définition et première expression

On définit le champ des accélérations de façon analogue au champ des vitesses : $\vec{a}(M,t)$ représente l'accélération de la particule fluide passant au point *M* à l'instant *t*. $\vec{a}(M,t)$ est donc la dérivée particulaire de $\vec{v}(M,t)$:

$$\boxed{\vec{a}(M,t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M,t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}+\left(\vec{v}(M,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(M,t)}\quad\text{ou plus simplement}\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}.$$

Le terme $\dfrac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}$ est l'*accélération locale* : il traduit le fait que le champ de vitesse n'est pas stationnaire (en un point donné, la vitesse peut évoluer au cours du temps, ce qui contribue à l'accélération des particules fluides).

Le terme $\left(\vec{v}(M,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(M,t)$ est l'*accélération convective* : il traduit le fait que le champ de vitesse n'est pas uniforme (quand une particule se déplace, elle passe par des zones de vitesses différentes, ce qui contribue à son accélération).

- Deuxième expression

Le terme $\left(\vec{v}(M,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(M,t)$, qui fait intervenir deux fois le champ de vitesses, peut être réécrit d'une autre manière :

$$\left(\vec{v}(M,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(M,t)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{v(M,t)^2}{2}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\vec{v}(M,t)\right]\wedge\vec{v}(M,t)$$

en utilisant l'opérateur rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}(M,t)=\vec{\nabla}\wedge\vec{v}(M,t)$ (voir complément mathématique, page 4).

(Bien sûr on ne vous demande pas de savoir démontrer cette égalité !)

On peut donc encore écrire le champ des accélérations sous la forme suivante :

$$\boxed{\vec{a}(M,t)=\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{v(M,t)^2}{2}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}(M,t)\wedge\vec{v}(M,t)}\quad\text{ou plus simplement}\quad \vec{a}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{v^2}{2}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}.$$

Ceci sera utile dans certains calculs de dynamique (voir chapitre Mc3).

b) Vecteur tourbillon

- Étude d'un exemple

Considérons un fluide qui tourne « en bloc », comme un solide, avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}=\omega\vec{e_z}$: alors la vitesse d'un point *M* est $\vec{v}(M,t)=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}=r\omega\vec{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques.

Calculons le rotationnel du champ des vitesses : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}=\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \cancel{v_z}}{\partial\theta}-\cancel{\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}}\right)\vec{e_r}+\left(\dfrac{\partial\cancel{v_r}}{\partial z}-\dfrac{\partial\cancel{v_z}}{\partial r}\right)\vec{e_\theta}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}-\dfrac{\partial\cancel{v_r}}{\partial\theta}\right)\vec{e_z}$

(il n'y a qu'une seule composante, $v_\theta=r\omega$, qui ne dépend que de *r*), soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r^2\omega)}{\partial r}\vec{e_z}=\dfrac{1}{r}2r\omega\vec{e_z}=2\vec{\Omega}$.

Le rotationnel du champ des vitesses caractérise donc, comme son nom l'indique, la tendance du champ à tourner autour d'un certain axe. Mais dans le cas étudié, il faut lui ajouter un facteur ½ pour obtenir exactement le vecteur rotation $\vec{\Omega}$; on admet la généralité de cette propriété.

- Définition

Le champ de *vecteur tourbillon* d'un fluide est défini par : $\vec{\Omega}(M,t)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}(M,t)$.

® Le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}(M,t)$, sans le facteur ½, est parfois appelé *vorticité*.

● Cas particulier : écoulement irrotationnel et potentiel des vitesses
Un écoulement est dit *irrotationnel* si le rotationnel du champ des vitesses (donc le vecteur tourbillon) est nul partout : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}(M,t), \forall M, \forall t$.

Or pour tout champ scalaire $G(M,t)$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G\right)=\vec{0}$ (voir complément mathématique). Réciproquement, tout champ vectoriel de rotationnel nul peut être écrit comme le gradient d'un champ scalaire.
Ainsi, dans le cas d'un écoulement irrotationnel, le champ des vitesses peut s'écrire :

$$\vec{v}(M,t)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi(M,t) \text{ avec } \Phi(M,t) \text{ le } \textit{potentiel des vitesses}.$$

Pour cette raison, un écoulement irrotationnel est aussi appelé *écoulement potentiel*.

– Si un écoulement irrotationnel est également incompressible : $\mathrm{div}\,\vec{v}(M,t)=0$ soit $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi(M,t)=0$.
Or l'opérateur $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est par définition le laplacien : on trouve donc $\Delta\Phi(M,t)=0$ pour un écoulement incompressible irrotationnel. Il s'agit de l'équation de Laplace, rencontrée dans de nombreuses autres situations.

c) Conditions aux limites cinématiques
La résolution d'une équation différentielle pour le champ des vitesses nécessite la connaissance de conditions aux limites.

● Vitesse normale sur une paroi solide
Lorsqu'un fluide rencontre une paroi solide, il ne peut pas la traverser, et il ne laisse pas non plus un vide entre la paroi et lui : cela implique que *la vitesse normale du fluide sur la paroi est égale à la vitesse normale de la paroi.*
En particulier, *la vitesse normale du fluide sur une paroi immobile est nulle.*
En revanche, d'un point de vue cinématique, sa vitesse tangentielle peut être différente : le fluide peut glisser sur la paroi.

● Vitesse normale à l'interface entre deux fluides
De même, à l'interface entre deux fluides non miscibles, il y a *continuité de la vitesse normale*.

● Vitesse à grande distance d'un obstacle
À grande distance d'un obstacle (c'est-à-dire en $r \gg a$ où a est la taille caractéristique de l'obstacle), l'influence de l'obstacle ne se fait plus sentir, donc le champ de vitesse est le même qu'en l'absence de l'obstacle.
