# Exercices du chapitre Mc2

### *Description eulérienne ou lagrangienne*

**1. Écoulement radial de Hubble**

Un fluide occupe initialement, de façon homogène (masse volumique $\rho(0)$ uniforme), l'intérieur d'une sphère de rayon $r_0$ et de centre $O$. À l'instant $t = 0$, on communique à chaque particule du fluide une vitesse initiale radiale $\overrightarrow{v_{\text{ini}}} = \dfrac{r_{\text{ini}}}{\tau}\overrightarrow{e_r}$, où $r_{\text{ini}}$ est sa distance au point $O$ et $\tau$ une constante. Ensuite chaque particule conserve cette vitesse au cours du temps.

a) En utilisant un point de vue lagrangien, donner la valeur de l'accélération d'une particule de fluide à un instant quelconque $t > 0$.

b) Déterminer le champ eulérien des vitesses en fonction des variables $r$ et $t$.

c) L'écoulement est-il incompressible ? Justifier qualitativement puis mathématiquement.

d) Déterminer le champ eulérien des accélérations, et comparer au résultat de la question a.

e) Déterminer la masse volumique $\rho(t)$, uniforme, en fonction du temps, de $\rho(0)$ et de la constante $\tau$, en exprimant la conservation de la masse *totale* du fluide.

f) Retrouver l'expression de $\rho(t)$ en résolvant l'équation *locale* de conservation de la masse. On donne la formule : $\operatorname{div}\left(A_r\overrightarrow{e_r}\right) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}$ en coordonnées sphériques.

### *Champ de vitesse et débit*

**2. Écoulement de Poiseuille plan**

Un fluide s'écoule dans la direction de l'axe ($Ox$), entre deux plaques planes parallèles au plan ($Oxy$), situées aux cotes $z = 0$ et $z = h$. L'expression de son champ des vitesses est :

$$\vec{v}(M) = v_{\max}\left(\frac{4z}{h} - \frac{4z^2}{h^2}\right)\overrightarrow{e_x}.$$

a) Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?

b) Sur un schéma en coupe dans le plan ($Oxz$), représenter les deux plaques planes, ainsi que les vecteurs vitesses de cinq points de même abscisse $x$ et de cotes respectives $z = 0$, $z = h/4$, $z = h/2$, $z = 3h/4$ et $z = h$. Ajouter en pointillé le profil des vitesses (ligne joignant les extrémités de tous les vecteurs vitesses des points d'abscisse $x$).

c) Schématiser une particule fluide « cubique » à un instant $t$, en dessinant quatre points en carré (par exemple deux de cote $z = h/4$ et deux de cote $z = h/2$) et leurs vecteurs vitesses. Dessiner ce que devient la particule fluide à un instant $t + \mathrm{d}t$, et en déduire si l'écoulement semble incompressible, et s'il semble irrotationnel. Vérifier ces deux propriétés par le calcul.

d) Calculer le débit volumique $D_V$ à travers une section rectangulaire de hauteur $h$ et de largeur $a$. En déduire la *vitesse débitante* $v_{\text{d}} = D_V/ah$ (vitesse moyenne sur la section).

### *Champs de vitesse, lignes de courant et trajectoires*

**3. Champ de vitesse oscillant**

Le mouvement d'un fluide est décrit par le champ de vitesse $\vec{v}(M,t) = v_0\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x} + v_0\overrightarrow{e_y}$ dans tout l'espace.

a) Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?

b) Déterminer sans calcul la nature géométrique des *lignes de courant* (aspect eulérien), et les représenter aux trois instants suivants : $t = 0$, $t = \pi/2\omega$, $t = \pi/\omega$.

c) Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ d'une particule fluide se déplaçant dans le plan ($Oxy$). En déduire l'équation cartésienne de sa *trajectoire* (aspect lagrangien), et dessiner les trajectoires de plusieurs particules fluides.

d) En un point $M$ à l'instant $t$, quelle est la relation géométrique entre la ligne de courant passant par $M$ et la trajectoire de la particule se trouvant en $M$ ?

**4. Écoulement près de murs plans**

On étudie un écoulement de fluide caractérisé par le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = \omega_0 y\overrightarrow{e_x} + \omega_0 x\overrightarrow{e_y}$.

a) Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?

b) Cet écoulement est-il incompressible ? Justifier.

c) Montrer que l'écoulement est irrotationnel, et déterminer son potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$.

d) Déterminer le champ des accélérations.

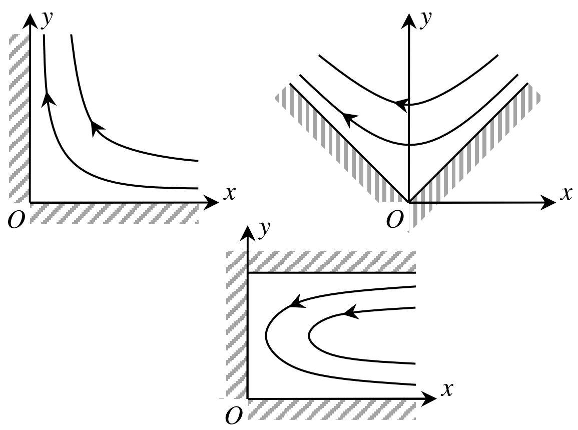
e) Déterminer l'équation cartésienne d'une ligne de courant (aspect eulérien) dans le plan ($Oxy$), à partir de sa définition : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \,//\, \vec{v}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}x}{v_x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{v_y}$.

f) Déterminer les équations différentielles couplées vérifiées par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ d'une particule fluide se déplaçant dans le plan ($Oxy$).
En déduire deux équations différentielles séparées pour les fonctions $u(t) = x(t) + y(t)$ et $v(t) = x(t) - y(t)$, résoudre celles-ci en prenant pour position initiale $M_0(x_0, y_0)$, et en déduire finalement les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

g) Calculer l'accélération d'une particule et comparer au résultat de la question d.

h) En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire d'une particule (aspect lagrangien). Vérifier que les trajectoires et les lignes de courant sont confondues.

i) Parmi les dispositions de parois représentées ci-dessous, laquelle est compatible avec le champ de vitesse étudié ?




**5. Mouvement d'un cylindre dans un fluide**

Un cylindre de rayon $a$, de génératrices parallèles à ($Oz$), se déplace à la vitesse constante $\overrightarrow{V_0} = -V_0\overrightarrow{e_x}$ dans un fluide initialement au repos dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}$, lié au repère ($Oxyz$). On note $\mathfrak{R}'$ le référentiel en translation avec le cylindre, lié au repère ($O'xyz$). À $t = 0$, $O$ et $O'$ sont confondus.
Le champ des vitesses dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ est :

$$\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} = +V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - V_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

dans une base cylindrique d'axe ($O'z$).

a) Vérifier que les vitesses en $r = a$ et en $r \to \infty$ sont conformes aux conditions aux limites.

b) Calculer les vitesses pour $r = a$ et les angles suivants : $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$.

c) Déterminer le champ des vitesses dans $\mathfrak{R}$.

d) L'écoulement est-il stationnaire dans $\mathfrak{R}'$ ? dans $\mathfrak{R}$ ?

e) Représenter l'allure des lignes de courant dans $\mathfrak{R}'$.

f) Montrer que les lignes de courant dans $\mathfrak{R}$ sont des cercles.

☞ *Réponses partielles*

**1.** b) $\vec{v}(M,t) = \dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}$ . e) $\rho(t) = \dfrac{\rho(0)}{(1+t/\tau)^3}$ .

**2.** d) $D_V = \dfrac{2}{3} v_{\max} a h$ .

**3.** b) Ce sont des droites (à préciser).

**4.** d) $\vec{a} = \omega_0^2 x \overrightarrow{e_x} + \omega_0^2 y \overrightarrow{e_y}$ . e) L'équation est de la forme $y^2 - x^2 = \text{cte}$ .

f) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \omega_0 u$ et $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 v$ . On obtient finalement $x(t) = x_0 \,\mathrm{ch}(\omega_0 t) + y_0 \,\mathrm{sh}(\omega_0 t)$ et $y(t) = x_0 \,\mathrm{sh}(\omega_0 t) + y_0 \,\mathrm{ch}(\omega_0 t)$ .

**5.** f) Équation d'une ligne de courant : $r = 2b\sin\theta$ .