<u>**Mc2 – Corrigé des exercices 1, 2, 3, 4 et 5**</u>

¤ Exercice 1

a) Puisque chaque particule conserve sa vitesse (direction, sens et norme), son mouvement est rectiligne uniforme, donc $\boxed{\vec{a}=\vec{0}}$.

b) Considérons la particule se trouvant en M à l'instant t. Elle possède toujours la vitesse qu'elle avait au départ, soit $\vec{v}=\overrightarrow{v_{\text{ini}}}=\dfrac{r_{\text{ini}}}{\tau}\overrightarrow{e_r}$,

et elle a donc parcouru entre 0 et t la distance : $r-r_{\text{ini}}=vt \Leftrightarrow r-v\tau=vt$ d'où on tire $v=\dfrac{r}{t+\tau}$, soit $\boxed{\vec{v}(M,t)=\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}}$.

c) Plus une particule fluide est loin du centre initialement, plus elle va vite : les particules s'éloignent donc les unes des autres, c'est-à-dire que <u>le fluide se dilate</u> : l'écoulement <u>n'est pas incompressible</u>. Mathématiquement, on calcule :
$\operatorname{div}\vec{v}=\operatorname{div}\left(\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\right)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{r^3}{t+\tau}\right)$ d'après la formule fournie, soit $\operatorname{div}\vec{v}=\dfrac{3}{t+\tau}>0$. La divergence n'étant pas nulle, l'écoulement <u>n'est pas incompressible</u>. Son signe positif indique d'ailleurs que le champ de vitesse a tendance à diverger géométriquement, ce qui est évident dès le départ.

d) $\vec{a}(M,t)=\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\right)+\left(\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}=-\dfrac{r}{(t+\tau)^2}\overrightarrow{e_r}+\dfrac{r}{t+\tau}\times\dfrac{1}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}$ soit $\boxed{\vec{a}(M,t)=\vec{0}}$, comme on l'a trouvé à la question a.

e) Le fluide occupe à $t=0$ l'intérieur d'une sphère de rayon r_0. À l'instant t quelconque, il occupe toujours une sphère, dont le rayon est la position des particules les plus éloignées de O : elles étaient initialement à $r_{\text{ini}}=r_0$, et sont maintenant à $r_0+vt=r_0+\dfrac{r_0}{\tau}t$.

La masse totale se conserve, soit : $m(t)=m(0)\Leftrightarrow\rho(t)\dfrac{4}{3}\pi\left(r_0+\dfrac{r_0}{\tau}t\right)^3=\rho(0)\dfrac{4}{3}\pi r_0^3$ d'où $\boxed{\rho(t)=\dfrac{\rho(0)}{\left(1+t/\tau\right)^3}}$.

f) Équation de conservation de la masse : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\operatorname{div}\left(\dfrac{\rho r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\dfrac{3\rho}{t+\tau}=0$. Pour résoudre cette équation différentielle à coefficient non constant, on sépare les variables : $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\dfrac{3\,\mathrm{d}t}{t+\tau}$. On peut alors intégrer de chaque côté entre les instants 0 et t : $\ln\rho(t)-\ln\rho(0)=-3\ln(t+\tau)+3\ln\tau$ ce qui équivaut à $\boxed{\rho(t)=\dfrac{\rho(0)}{\left(1+t/\tau\right)^3}}$.

¤ Exercice 2 (fin)

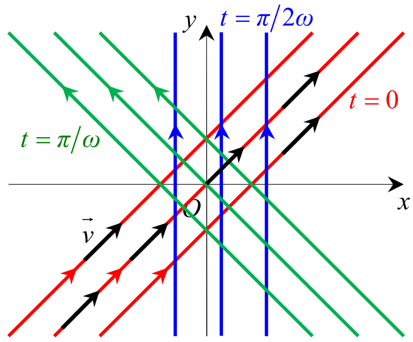
d) $D_V=\displaystyle\iint_\Sigma\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{h}v_{\max}\left(\dfrac{4z}{h}-\dfrac{4z^2}{h^2}\right)\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=v_{\max}a\left[\dfrac{2z^2}{h}-\dfrac{4z^3}{3h^2}\right]_{z=0}^{h}$ soit $\boxed{D_V=\dfrac{2}{3}v_{\max}ah}$.

Vitesse débitante : $v_{\text{d}}=\dfrac{D_V}{ah}$ soit $\boxed{v_{\text{d}}=\dfrac{2}{3}v_{\max}}$. Le débit est le même que si la vitesse avait cette même valeur v_{d} sur toute la largeur.

¤ Exercice 3

a) Le champ de vitesse dépend de la variable t : <u>l'écoulement n'est pas stationnaire</u>. En revanche le champ de vitesse ne dépend d'aucune variable spatiale, la vitesse est la même en tout point : <u>l'écoulement est uniforme</u>.

b) Le champ de vitesse étant uniforme, <u>les lignes de courant sont des droites parallèles</u>, à un instant donné. Mais à des instants différents, ce sont d'autres droites, elles ont tourné.



À l'instant $t=0$, $\vec{v}(M,0)=v_0\,\overrightarrow{e_x}+v_0\,\overrightarrow{e_y}$: les deux composantes étant égales, les vecteurs vitesses font un angle de $\pi/4$ avec les axes (Ox) et (Oy), donc les lignes de courant également (en rouge sur la figure). On peut dire qu'à cet instant, toutes les particules fluides sont en train de se déplacer vers la direction en haut à droite.

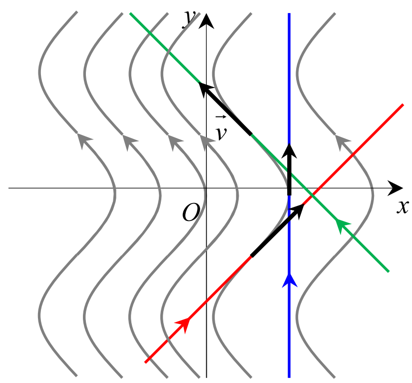
À l'instant $t=\pi/2\omega$, $\vec{v}(M,\pi/2\omega)=v_0\,\overrightarrow{e_y}$: les lignes de courant (en bleu) sont parallèles à l'axe (Oy). À l'instant $t=\pi/\omega$, $\vec{v}(M,\pi/\omega)=-v_0\,\overrightarrow{e_x}+v_0\,\overrightarrow{e_y}$: les lignes de courant (en vert) font cette fois un angle de $3\pi/4$ avec (Ox) et de $\pi/4$ avec (Oy).

c) On intègre $v_x=\dot{x}=v_0\cos(\omega t)$ et $v_y=\dot{y}=v_0=\text{cte}$ par rapport au temps :

$\boxed{x(t)=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)+A}$ et $\boxed{y(t)=v_0t+B}$, A et B étant différentes pour chaque particule fluide.

Pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire, il faut éliminer le temps t :

$t=\dfrac{y-B}{v_0}$ d'où $\boxed{x=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\left(\dfrac{\omega}{v_0}(y-B)\right)+A}$. Les trajectoires sont des <u>sinusoïdes</u> (en gris).



d) En un point M à un instant t, la ligne de courant et la trajectoire sont toutes les deux tangentes au vecteur vitesse de la particule se trouvant en M à cet instant, donc tangentes l'une à l'autre. (Les tangentes rouge et verte ci-contre traversent la courbe car elles tombent sur des points d'inflexion.)

¤ Exercice 4

a) Le champ des vitesses ne dépend pas de la variable t : <u>l'écoulement est stationnaire</u>.
En revanche ce champ dépend de deux variables spatiales : <u>l'écoulement n'est pas uniforme</u>.

b) $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}$ soit $\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = 0}$ car $v_x = \omega_0 y$ ne dépend pas de x, ni $v_y = \omega_0 x$ de y. Donc l'écoulement est incompressible.

c) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z} = (\omega_0 - \omega_0)\overrightarrow{e_z}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}}$: l'écoulement est irrotationnel. On peut donc définir un potentiel des vitesses $\Phi(M)$ tel que $\vec{v}(M) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\Phi(M)$. Projetons cette relation sur la base cartésienne : $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \omega_0 y$ (1) ; $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \omega_0 x$ (2) ; $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ (3). La troisième montre que Φ ne dépend pas de z, donc on cherche une fonction $\Phi(x,y)$. On intègre (1) par rapport à x : $\Phi(x,y) = \omega_0 yx + A(y)$. On dérive ceci par rapport à y : $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \omega_0 x + A'(y)$. Et on identifie ceci avec (2) : $A'(y) = 0$ donc $A(y) = \text{cte}$, que l'on notera donc simplement A. Finalement : $\boxed{\Phi(x,y) = \omega_0 yx + A}$.

d) $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\vec{v} = \vec{0} + \left(\omega_0 y\dfrac{\partial}{\partial x} + \omega_0 x\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\omega_0 y\,\overrightarrow{e_x} + \omega_0 x\,\overrightarrow{e_y}\right)$ soit $\boxed{\vec{a} = \omega_0^2\left(x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}\right)}$.

e) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\omega_0 y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\omega_0 x} \Leftrightarrow x\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y$. On intègre : $x^2 = y^2 + \text{cte}$ ou $\boxed{y^2 - x^2 = \text{cte}}$.

f) $\boxed{\dot{x}(t) = \omega_0 y(t)}$ (4) et $\boxed{\dot{y}(t) = \omega_0 x(t)}$ (5). En additionnant membre à membre on obtient : $\dot{u}(t) = \omega_0 u(t)$, qui donne $u(t) = C\exp(\omega_0 t)$. En soustrayant membre à membre on obtient : $\dot{v}(t) = -\omega_0 v(t)$, qui donne $v(t) = D\exp(-\omega_0 t)$. Avec les conditions initiales : $\boxed{u(t) = (x_0 + y_0)\exp(\omega_0 t)}$ et $\boxed{v(t) = (x_0 - y_0)\exp(-\omega_0 t)}$. Finalement : $x(t) = \dfrac{u(t)+v(t)}{2} \Leftrightarrow \boxed{x(t) = x_0\operatorname{ch}(\omega_0 t) + y_0\operatorname{sh}(\omega_0 t)}$; et $y(t) = \dfrac{u(t)-v(t)}{2} \Leftrightarrow \boxed{y(t) = x_0\operatorname{sh}(\omega_0 t) + y_0\operatorname{ch}(\omega_0 t)}$.

g) $\ddot{x}(t) = x_0\omega_0^2\operatorname{ch}^2(\omega_0 t) + y_0\omega_0^2\operatorname{sh}^2(\omega_0 t) = \omega_0^2 x(t)$ et $\ddot{y}(t) = x_0\omega_0^2\operatorname{sh}^2(\omega_0 t) + y_0\omega_0^2\operatorname{ch}^2(\omega_0 t) = \omega_0^2 y(t)$ soit $\boxed{\vec{a} = \omega_0^2\left(x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}\right)}$.

h) Puisqu'on veut vérifier que l'on retrouve l'équation de la question e, on calcule $y^2 - x^2$:

$y(t)^2 - x(t)^2 = x_0^2\operatorname{sh}^2(\omega_0 t) + y_0^2\operatorname{ch}^2(\omega_0 t) + 2x_0 y_0\operatorname{sh}(\omega_0 t)\operatorname{ch}(\omega_0 t) - x_0^2\operatorname{ch}^2(\omega_0 t) - y_0^2\operatorname{sh}^2(\omega_0 t) - 2x_0 y_0\operatorname{ch}(\omega_0 t)\operatorname{sh}(\omega_0 t)$

soit $y(t)^2 - x(t)^2 = \left(y_0^2 - x_0^2\right)\left(\operatorname{ch}^2(\omega_0 t) - \operatorname{sh}^2(\omega_0 t)\right) = y_0^2 - x_0^2$. On a bien trouvé quelque chose de la forme $\boxed{y^2 - x^2 = \text{cte}}$.

i) Dans nos équations, $x(t)$ et $y(t)$ tendent tous les deux vers l'infini simultanément, ce qui exclut le troisième schéma (où y est borné) et le premier schéma (où y tend vers zéro quand x tend vers l'infini, et inversement). Le bon schéma est donc le deuxième.

¤ Exercice 5

a) En $r = a$, $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} = -2V_0\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$: la vitesse au contact du solide est bien tangente au solide (composante normale nulle).

En $r \to \infty$, $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} = +V_0\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - V_0\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta} = V_0\,\overrightarrow{e_x} = -\overrightarrow{V_0}$, ce qui correspond à $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{0}$ (loi de composition des vitesses) : à grande distance, le fluide reste immobile, non affecté par la présence du solide.

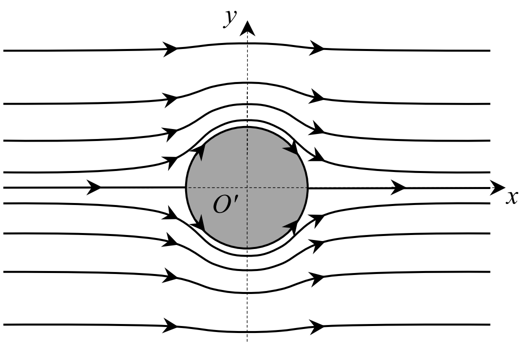
b) $\theta = 0$: $\boxed{\vec{v}(a,0)_{\mathfrak{R}'} = \vec{0}}$. $\theta = \pi/2$: $\boxed{\vec{v}(a,\pi/2)_{\mathfrak{R}'} = +2V_0\,\overrightarrow{e_x}}$. $\theta = \pi$: $\boxed{\vec{v}(a,\pi)_{\mathfrak{R}'} = \vec{0}}$. $\theta = 3\pi/2$: $\boxed{\vec{v}(a,3\pi/2)_{\mathfrak{R}'} = +2V_0\,\overrightarrow{e_x}}$.

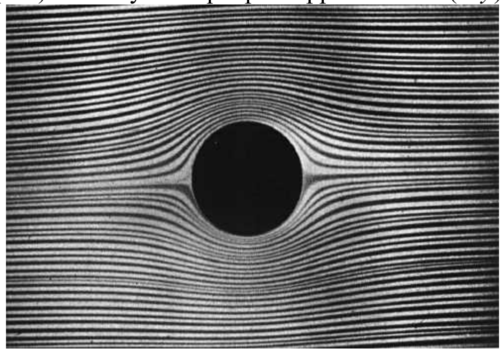
c) Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} + \overrightarrow{v_{\mathrm{e}}}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}$

soit $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = +V_0\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - V_0\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta} - V_0\,\overrightarrow{e_x}$ soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = -V_0\dfrac{a^2}{r^2}\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - V_0\dfrac{a^2}{r^2}\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}}$.

d) L'écoulement est stationnaire dans $\mathfrak{R}'$, car le champ de vitesse ne contient que des termes indépendants du temps. Mais l'écoulement n'est pas stationnaire dans $\mathfrak{R}$, car ce champ de vitesse est exprimé dans la base cylindrique liée au cylindre, donc les vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ ainsi que les coordonnées r et θ dépendent du temps dans un référentiel où le cylindre bouge. Il est d'ailleurs évident que si on est fixe dans $\mathfrak{R}$, on voit l'écoulement varier lorsque le cylindre passe.

e) Dans $\mathfrak{R}'$, les lignes de champ sont confondues avec les trajectoires des particules fluides (écoulement stationnaire).
On utilise les informations trouvées sur le champ de vitesse au contact du cylindre (tangent au cylindre) et à grande distance (uniforme), et entre ces deux zones on trace des lignes de forme intermédiaire, qui montrent comment le fluide contourne le cylindre. D'autre part, l'expression du champ de vitesse est symétrique par rapport à l'axe ($O'x$) et antisymétrique par rapport à l'axe ($O'y$).





f) $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\ //\ \vec{v}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{v_r} = \dfrac{r\,\mathrm{d}\theta}{v_\theta} \Leftrightarrow \dfrac{r^2}{a^2\cos\theta}\mathrm{d}r = \dfrac{r^2}{a^2\sin\theta}r\,\mathrm{d}\theta \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\sin\theta}$ d'où après intégration : $\ln r = \ln(\sin\theta) + \text{cte}$ $\Leftrightarrow r = \text{cte}\times\sin\theta$. Si on note la constante $2b$, l'équation $\boxed{r = 2b\sin\theta}$ est celle d'un cercle de rayon b et passant par O.