Exercices du chapitre Mc3

Ordres de grandeur en mécanique des fluides

1. Écoulement dans une canalisation

Un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ circule dans une canalisation de diamètre d avec un débit D_V.

Évaluer le nombre de Reynolds dans les deux cas suivants, et en déduire la nature de l'écoulement et la validité éventuelle du modèle de l'écoulement parfait :

a) eau chaude dans un tuyau ($\rho = 990\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\eta = 6{,}2\cdot 10^{-4}\ \mathrm{Pa\cdot s}$, $d = 8{,}0\ \mathrm{cm}$, $D_V = 8{,}5\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$) ;

b) fioul lourd dans un oléoduc ($\rho = 932\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\eta = 11{,}0\ \mathrm{Pa\cdot s}$, $d = 25\ \mathrm{cm}$, $D_V = 19{,}7\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$).

2. Nombre de Mach et écoulement incompressible

Le nombre de Mach d'un écoulement est défini par : $Ma = \dfrac{V}{c}$

où V est l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement et c la célérité du son dans le fluide. Le fait qu'un écoulement de fluide, notamment de gaz, puisse être considéré comme incompressible est lié à l'ordre de grandeur de Ma.

On note ρ la masse volumique du fluide, μ l'ordre de grandeur de la *variation* de cette masse volumique dans l'écoulement, P la pression, p l'ordre de grandeur de la *variation* de la pression dans l'écoulement, L une longueur caractéristique de l'écoulement, τ une durée caractéristique de l'écoulement.

a) Énoncer l'équation locale de conservation de la masse, et en déduire qu'un écoulement incompressible vérifie $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

En pratique, on pourra considérer qu'un écoulement est incompressible si $\left\|\operatorname{div}\vec{v}\right\| \ll \dfrac{V}{L}$.

b) Déduire de cette condition une relation en ordres de grandeur entre μ, τ, ρ, V et L.

c) Écrire l'équation de Navier–Stokes pour un écoulement parfait stationnaire, en négligeant l'effet du poids (très faible dans un gaz). En déduire une relation en ordres de grandeur entre ρ, V et p.

d) On montre en physique des ondes (voir chapitre On2) que $p \sim \mu c^2$. En déduire finalement qu'un écoulement de gaz peut être considéré comme incompressible lorsque $Ma^2 \ll 1$.

Équations locales de la dynamique

3. Écoulement de Poiseuille

On étudie l'écoulement stationnaire et incompressible d'un liquide, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η, dans une canalisation cylindrique d'axe horizontal (Oz), de rayon R et de longueur L. On suppose $R \ll L$, ce qui permet de négliger l'effet du poids dans le champ de pression, qui est alors de la forme $P(z)$ en coordonnées cylindriques. Le champ de vitesse est a priori de la forme $\vec{v}(M) = v_z(r,z)\,\vec{e_z}$.

On note $\Delta P = P(0) - P(L) > 0$: c'est cette différence de pression entre l'entrée et la sortie de la canalisation qui provoque l'écoulement du liquide.

Un formulaire (opérateurs en coordonnées cylindriques) se trouve à la page suivante.

a) Montrer que le champ de vitesse est nécessairement indépendant de z.

b) Écrire l'équation de Navier–Stokes, puis montrer que les hypothèses faites permettent de la réduire à $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,P = \eta\,\vec{\Delta}\vec{v}$.

c) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ est une constante. En déduire l'expression de $P(z)$ en fonction de $P(0)$, ΔP, L et z.

d) Déterminer l'expression du champ de vitesse, et représenter le profil des vitesses sur un schéma.

e) Déterminer l'expression du débit volumique D_V.

f) Proposer une définition pour la *résistance hydraulique* R_h de la canalisation, puis exprimer R_h en fonction de L, R et η. Que devient R_h si le rayon R est divisé par 2 ?

4. Cavitation dans l'eau

Lorsqu'un objet solide se déplace rapidement dans l'eau, il peut créer autour de lui de petites bulles de vapeur d'eau : c'est le phénomène de cavitation, observé par exemple au voisinage des hélices de navires.

On cherche ici à déterminer la durée T de disparition (implosion) d'une de ces bulles, de rayon initial a_0, entourée d'une quantité d'eau suffisante pour être considérée comme infinie. À cette échelle, on pourra négliger l'effet de la pesanteur. À grande distance de la bulle, la pression dans l'eau est P_∞ et la vitesse de l'eau est nulle.

Un formulaire (opérateurs en coordonnées sphériques) se trouve à la page suivante.

a) On suppose que la durée T ne dépend que de a_0, de P_∞ et de la masse volumique ρ de l'eau : on cherche donc une expression de la forme : $T = k\cdot a_0^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot P_\infty^\gamma$ où k est un facteur sans dimension. Déterminer les exposants α, β et γ par analyse dimensionnelle. En déduire l'ordre de grandeur de T pour une bulle de taille millimétrique.

On cherche maintenant une expression exacte de T (avec la valeur du coefficient k).

Le rayon de la bulle est noté $a(t)$ à un instant quelconque. Les champs de vitesse et de pression dans l'eau entourant la bulle ($r > a(t)$) sont à symétrie sphérique, avec une vitesse uniquement radiale : $\vec{v}(M,t) = v_r(r,t)\,\vec{e_r}$ et $P(M,t) = P(r,t)$.

La vitesse est nulle partout à l'instant initial. La pression à l'intérieur de la bulle, inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau, est négligeable devant P_∞.

L'écoulement de l'eau est considéré comme parfait et incompressible, dans le référentiel terrestre galiléen où le centre de la bulle est immobile.

b) À partir de l'incompressibilité de l'eau, montrer que la vitesse est de la forme : $v_r(r,t) = \dfrac{a(t)^2}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$.

c) Montrer que l'écoulement admet un potentiel des vitesses $\Phi(r,t)$, et le déterminer et prenant $\Phi(\infty,t) = 0$.

d) En calculant la circulation de l'équation de Navier–Stokes sur une ligne de courant entre $r = a(t)$ et $r \to \infty$, établir l'équation différentielle : $a(t)\dfrac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\dfrac{P_\infty}{\rho}$.

e) On pose $z = \left(\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2$. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z(a)$. Résoudre cette équation en séparant les variables et en déduire la relation :

$$a(t)^3\left[\frac{2P_\infty}{3\rho} + \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = \text{cte} \ \ \text{(préciser la constante).}$$

f) Exprimer alors $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, puis calculer T en s'aidant de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}\,\mathrm{d}x = 0{,}74$.

Comparer à la formule obtenue à la question a.

Bilans macroscopiques

5. Propulsion d'une fusée

Une fusée a les caractéristiques suivantes : masse des structures et de l'équipement M = 5,0 t ; masse du mélange propulsif au départ : m_0 = 50,0 t ; vitesse d'éjection des gaz brûlés (par rapport à la fusée) : u = 2500 m·s^{-1} ; débit des gaz brûlés : D = 400 kg·s^{-1}. On néglige la résistance de l'air et on supposera constante l'intensité de la pesanteur (g = 9,8 m·s^{-2}). L'instant du lancement est pris comme origine des temps ; on cherche à déterminer la vitesse $\vec{v}(t)$ de la fusée, puis son altitude $z(t)$.

a) La fusée étant un système ouvert, on doit se ramener à un système fermé : on prend la fusée avec le carburant restant à un instant t ; à un instant ultérieur $t+\mathrm{d}t$, ce système s'est séparé en deux (d'une part les gaz éjectés, d'autre part la fusée avec le carburant restant). Quelle est la masse $m(t)$ de ce système ? Donner l'expression de la variation élémentaire $\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)$ de la quantité de mouvement de ce système en fonction de $\mathrm{d}\vec{v}=\vec{v}(t+\mathrm{d}t)-\vec{v}(t)$, M, m_0, D, t, $\mathrm{d}t$ et $\vec{u}$. (On négligera les termes infiniment petits d'ordre 2.)

b) En déduire, par application du théorème de la quantité de mouvement, l'accélération $\vec{a}(t)$ de la fusée. Vérifier que les valeurs numériques données permettent effectivement le décollage de la fusée.

c) Après avoir projeté sur l'axe vertical ascendant (Oz), déterminer la vitesse $v(t)$, puis l'altitude $z(t)$ de la fusée.

d) À quel instant t_1 se termine la combustion du carburant ? Calculer alors $v(t_1)$ et $z(t_1)$.

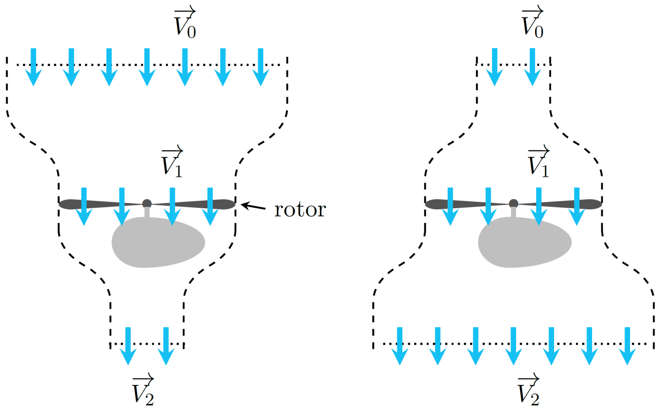
6. Puissance d'un hélicoptère

On considère un hélicoptère en situation de vol purement vertical, à vitesse constante dans le référentiel terrestre. On modélise l'air par un fluide parfait, incompressible (on note ρ sa masse volumique), de température $T_0 = 280$ K uniforme. On suppose de plus que la pression de l'air reste égale à la pression atmosphérique $P_0 = 1{,}0$ bar sauf au voisinage immédiat des pales du rotor : On note P_1^+ la pression juste au-dessus des pales, P_1^- celle juste au-dessous.

La masse de l'appareil (avec passagers et matériel) est m = 1500 kg. Le rotor est constitué de trois pales, chacune de longueur ℓ = 5,35 m.

a) Énoncer la relation de Bernoulli. Justifier que le terme de pesanteur est négligeable devant les deux autres dans l'étude de l'hélicoptère.

On se place dans le référentiel lié à l'hélicoptère et on cherche à modéliser l'allure du tube de courant balayé par le rotor en vol vertical à vitesse constante : deux propositions sont données ci-dessous.



b) Comparer V_0 et V_2 dans les deux cas.

c) Appliquer la relation de Bernoulli pour l'air situé au-dessus du rotor, puis pour l'air situé au-dessous. En déduire l'expression de $P_1^+ - P_1^-$, et conclure sur le schéma correct.

Pour la suite, on raisonnera sur le tube de courant identifié ci-dessus, et on admettra que $V_1 = \dfrac{V_0+V_2}{2}$.

d) On suppose dans cette question que l'hélicoptère est en situation de vol stationnaire (c'est-à-dire à altitude constante, sans mouvement horizontal par rapport au sol) : on pourra alors supposer $V_0 \ll V_2$. À partir d'un bilan d'énergie cinétique, montrer que la puissance $\mathcal{P}$ que doit fournir le rotor à l'air s'écrit : $\mathcal{P} = 2\rho\pi\ell^2 V_1^3$.

e) Établir la relation $\mathcal{P} = \sqrt{\dfrac{(mg)^3}{2\rho\pi\ell^2}}$, puis déterminer la valeur numérique de $\mathcal{P}$. Données : $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $M_{\mathrm{air}} = 29\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $R = 8{,}314\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

f) Expliquer pourquoi un hélicoptère ne peut pas voler au-dessus d'une certaine altitude (plafond).

☞ *Formulaire*

En coordonnées cylindriques : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$;

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_z} \text{ pour un champ } \vec{A}=A_z(r)\vec{e_z}.$$

En coordonnées sphériques : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$;

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r}+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

☞ *Réponses partielles*

1. a) $Re = \dfrac{4\rho D_V}{\pi\eta d} = 2{,}2\cdot10^5$. **3.** d) $\vec{v}(M) = \dfrac{\Delta P}{4\eta L}(R^2-r^2)\vec{u_z}$. e) $D_V = \dfrac{\pi R^4\Delta P}{8\eta L}$.

4. a) $\alpha = 1$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $\gamma = -\dfrac{1}{2}$. **5.** a) $\mathrm{d}\vec{p} = (M+m_0-Dt)\mathrm{d}\vec{v}+D\,\mathrm{d}t\,\vec{u}$. c) $v(t) = u\ln\left(\dfrac{M+m_0}{M+m_0-Dt}\right)-gt$.

6. c) Le premier schéma est le bon. d) $\mathcal{P} = 2\rho\pi\ell^2V_1^3$.