

Complément aux TP – Erreurs de mesure et incertitudes

1. Définitions

a) Erreurs de mesures

• Quand on mesure une grandeur x , on cherche sa *valeur vraie* x_{vraie} . On utilise une méthode de mesure (procédure et appareils de mesure), qui donne la *valeur mesurée* x_{mes} . La différence est l'erreur de mesure : $e = x_{\text{mes}} - x_{\text{vraie}}$.

• Il y a deux types d'erreurs.

– *Erreur systématique*

Elle est due à une mauvaise procédure, à un appareil défectueux, à une erreur d'utilisation... Elle est la même pour toutes les mesures ; si on arrive à la détecter, elle peut être corrigée (en améliorant la méthode de mesure, ou bien a posteriori).

– *Erreur aléatoire*

Lorsqu'on répète la mesure, on obtient des résultats différents, même si on essaie de se placer à chaque fois dans les mêmes conditions. Cette erreur aléatoire est inévitable, mais peut être réduite en augmentant le nombre de mesures.

b) Résultat d'une mesure

• Pour la mesure de x , on doit déterminer un *intervalle de confiance* $[x_1; x_2]$: la valeur vraie se trouve dans cet intervalle avec une grande probabilité. Le résultat est donné sous la forme : $x = x_{\text{est}} \pm \Delta x$

avec $x_{\text{est}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{2}$. x_{est} est la *valeur estimée*, Δx l'*incertitude absolue*, $\frac{\Delta x}{x_{\text{est}}}$ l'*incertitude relative*.

• La détermination de l'incertitude (voir méthodes dans la suite) étant elle-même imprécise, on la donnera généralement avec un seul chiffre significatif.

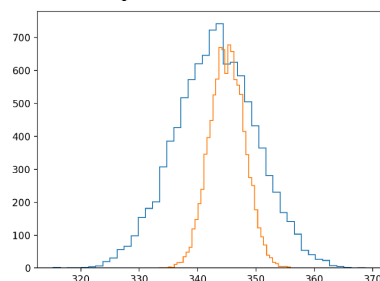
c) Écart normalisé

Si on veut comparer deux valeurs x et y (résultats de deux expériences, résultat d'une expérience et valeur théorique...), pour lesquelles on dispose de la valeur estimée et de l'incertitude, on doit calculer leur *écart normalisé* :

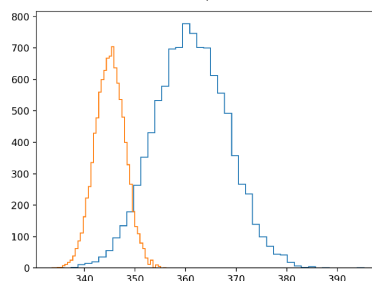
$$E = \frac{|x_{\text{est}} - y_{\text{est}}|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Par convention, on estime généralement que les deux valeurs sont compatibles si $E < 2$.

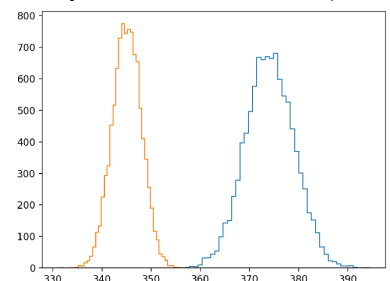
Exemple de deux distributions de résultats de mesures (auteur : Maxime CHAMPION, lycée Thiers, Marseille)



$E = 0,3$: bien compatibles



$E = 2,1$: pas vraiment compatibles



$E = 5,0$: franchement incompatibles

2. Évaluation de la valeur estimée et de l'incertitude

a) Évaluation de type A

Une première méthode consiste à répéter la mesure N fois : on obtient N valeurs de mesure $x_{\text{mes},i}$. On définit alors deux grandeurs mathématiques :

– la moyenne arithmétique $\overline{x_{\text{mes}}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{\text{mes},i}$;

– l'écart-type expérimental $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{\text{mes},i} - \overline{x_{\text{mes}}})^2}$ indiquant la dispersion des données autour de la moyenne.

Pour la valeur estimée on prend la moyenne des valeurs mesurées : $x_{\text{est}} = \overline{x_{\text{mes}}}$.

Pour l'incertitude, on définit tout d'abord l'*incertitude-type* $s = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ (qui correspond à un niveau de confiance de 68 % pour une distribution statistique dite « normale »). Pour un niveau de confiance de 95 %, utilisé le plus souvent, l'*incertitude-type élargie* a pour expression approchée $\Delta x = 2s = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$.

b) Évaluation de type B

Si on ne peut faire la mesure qu'une fois, la valeur estimée est alors bien sûr celle donnée par cette unique mesure. Pour trouver l'incertitude-type, puisqu'on ne peut pas faire de statistique, on utilise alors d'autres informations : en voici quelques exemples. Là encore, l'incertitude-type élargie sera $\Delta x = 2s$.

- Si le constructeur de l'appareil de mesure donne une résolution r , on prend $s = \frac{r}{\sqrt{3}}$.
- Si on lit des graduations, l'incertitude-type peut être évaluée à $s = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,3$ graduation.
- On peut avoir une incertitude de pointage, due à la difficulté d'observation : les valeurs possibles sont dans un intervalle $[x_{\min}; x_{\max}]$, et on peut alors prendre pour incertitude-type $s = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}}$.

c) Incertitude composée

Si on *calcule* la grandeur x en fonction de données indépendantes $a, b, c, \dots$ l'incertitude Δx dépend de $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$

• Formules de calcul théorique

- Pour $x = a + b$ ou $x = a - b$: $\Delta x = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$.
- Pour $x = a^n b^p$: $\frac{\Delta x}{x_{\text{est}}} = \sqrt{\left(n \frac{\Delta a}{a_{\text{est}}}\right)^2 + \left(p \frac{\Delta b}{b_{\text{est}}}\right)^2}$.
- Pour $x = ab$ ou $x = \frac{a}{b}$: $\frac{\Delta x}{x_{\text{est}}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a_{\text{est}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b_{\text{est}}}\right)^2}$.
- Pour $x = f(a) : \Delta x = \left| \frac{df}{da} \Delta a \right|$.
- Pour $x = f(a, b, c, \dots) : \Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \dots}$

Lorsque l'expression de x comporte de nombreuses opérations et fonctions, le calcul de Δx , qui devrait combiner plusieurs des formules ci-dessus, peut s'avérer trop lourd. Une autre solution est alors de faire une simulation numérique.

• Calcul numérique par simulation (méthode de Monte Carlo)

La méthode consiste à produire, au moyen d'un code informatique, des valeurs aléatoires des grandeurs $a, b, c, \dots$ en utilisant leurs incertitudes connues, et de calculer à chaque fois la grandeur x ; on détermine alors Δx par une statistique sur les résultats obtenus.

Dans Python, on peut produire des valeurs aléatoires dans un intervalle spécifié avec deux fonctions de numpy : `random.uniform` si on suppose que la distribution des valeurs possibles est « uniforme » (rectangulaire); `random.normal` si on suppose que la distribution des valeurs possibles est « normale » (gaussienne, plus réaliste).

⑤ Voici un exemple de code (*écrit par Maxime CHAMPION*) pour déterminer l'incertitude sur la célérité c d'une onde à partir de sa période ($T = 24,4 \mu\text{s}$ avec $\Delta T = 0,1 \mu\text{s}$) et de la distance entre deux nœuds séparés de 10 longueurs

d'onde ($x_A = 11,1 \text{ cm}$, $x_B = 19,5 \text{ cm}$ avec $\Delta x = 0,5 \text{ cm}$ pour chacun). La formule de calcul est $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{x_B - x_A}{10T}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Entrez la période
T = 24.4e-6 # s
# Entrez la précision sur la période
DeltaT = 0.1e-6 # s
# Positions de des points
A = 0.111 # m
B = 0.195 # m
# Entrez les précisions
DeltaA = 0.005 # m
DeltaB = 0.005 # m

# Entrez la fonction de composition
def celerite(T,a,b):
    return (b-a)/(10*T)
# Entrez le nombre de simulation que vous voulez effectuer
N = 100000

# Calculs avec une distribution de probabilité uniforme
Celerite=[]

for i in range(0,N):
    x = np.random.uniform(T-DeltaT,T+DeltaT)
    a = np.random.uniform(A-DeltaA,A+DeltaA)
    b = np.random.uniform(B-DeltaB,B+DeltaB)
    Celerite.append(celerite(x,a,b))
```

```
plt.figure(1)
plt.hist(Difference,bins = 'rice')
plt.title('Résultat du tirage aléatoire du produit après simulation')
plt.xlabel("c (m/s)")

# Calcul et affichage moyenne et écart type
moy = np.mean(Celerite)
std = np.std(Celerite,ddof=1)

print("Moyenne = {:.2f} m/s".format(moy))
print("Ecart type = {:.2f} m/s".format(std))
```

Moyenne = 344.31 m/s
Ecart type = 16.76 m/s

