Op3 – Corrigé des exercices 2 et 3

¤ Exercice 2

a) *(Partie traitée en classe)* $\boxed{\delta_{2/1}(M) = a\sin\varepsilon + \dfrac{a\,x}{f'}}$, $\boxed{i = \dfrac{\lambda f'}{a}}$, $\boxed{x_0 = -f'\varepsilon}$.

b) On obtiendrait de même des franges rectilignes horizontales, avec toujours $i = \dfrac{\lambda f'}{a}$ et cette fois $\boxed{x_0' = +f'\varepsilon}$. Par rapport à la figure précédente, celle-ci est translatée de $x_0' - x_0 = 2f'\varepsilon$ vers le haut. Les franges disparaissent complètement (brouillage total) si ce décalage fait coïncider les franges brillantes dues à une étoile avec les franges sombres dues à l'autre, autrement dit si $2f'\varepsilon = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)i$ avec m entier. Cela équivaut à $2f'\varepsilon = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda f'}{a}$ d'où $\boxed{a_m = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}}$.

c) Formule de Fresnel pour des interférences à deux ondes : $I_+(x) = 2I_0\left[1+\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\left(\varepsilon+\dfrac{x}{f'}\right)\right)\right]$ et $I_-(x) = 2I_0\left[1+\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\left(-\varepsilon+\dfrac{x}{f'}\right)\right)\right]$. Les deux sources de lumière étant incohérentes (étoiles indépendantes), les intensités s'additionnent sur l'écran : $I(x) = I_+(x)+I_-(x) = 2I_0\left[2+\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\left(\varepsilon+\dfrac{x}{f'}\right)\right)+\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\left(-\varepsilon+\dfrac{x}{f'}\right)\right)\right]$ soit $\boxed{I(x) = 4I_0\left[1+\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\varepsilon\right)\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\dfrac{x}{f'}\right)\right]}$. Le contraste est : $C = \dfrac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$ avec $I_{\max} = 4I_0\left[1+\left|\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\varepsilon\right)\right|\right]$ et $I_{\min} = 4I_0\left[1-\left|\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\varepsilon\right)\right|\right]$, soit $\boxed{C = \left|\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\varepsilon\right)\right|}$. Ce contraste s'annule (brouillage total) lorsque $\cos\left(2\pi\dfrac{a}{\lambda}\varepsilon\right) = 0$, soit $2\pi\dfrac{a}{\lambda}\varepsilon = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ et finalement $\boxed{a_m = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}}$.

d) Pour $m = 0$, $\boxed{a_0 = \dfrac{\lambda}{4\varepsilon}}$. AN avec $\varepsilon = 2{,}0'' = \dfrac{1°}{1800} = 9{,}7\cdot10^{-6}$ rad : $\boxed{a_0 = 1{,}4\text{ cm}}$.

¤ Exercice 3

a) $\delta = n_a a(\sin\theta - \sin i)$ *(voir cours)* d'où $\boxed{\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \dfrac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta-\sin i)}$.

b) $\underline{A}_1 = A\,e^{-j\varphi_1}$, $\underline{A}_2 = A\,e^{-j(\varphi_1+\varphi)} = \underline{A}_1\,e^{-j\varphi}$, puis de même $\underline{A}_3 = \underline{A}_2\,e^{-j\varphi}$, etc. Les $\underline{A}_n$ forment donc une <u>suite géométrique</u> de raison $e^{-j\varphi}$. Par récurrence : $\boxed{\underline{A}_n = \underline{A}_1\,e^{-j(n-1)\varphi}}$.

c) $\underline{A} = \underline{A}_1\dfrac{1-\exp(jN\varphi)}{1-\exp(j\varphi)}$ d'où $I = I_0\dfrac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2\varphi/2}$ *(voir cours, chapitre Op2, partie 3.b).*

d) Maxima pour $\varphi = 2m\pi$ avec m entier, zéros pour $\varphi = q\dfrac{2\pi}{N}$ avec q entier sauf multiple de N *(idem).*

e) $\dfrac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta_m - \sin i) = 2m\pi$ d'où $\boxed{a(\sin\theta_m - \sin i) = m\lambda}$ (1).

f) Les angles sont symétriques par rapport à 0 (aux incertitudes près), donc $\boxed{i = 0 \text{ (incidence normale)}}$, d'où $a\sin\theta_m = m\lambda$.
La méthode la plus précise est alors de tracer la courbe donnant $m\lambda$ en fonction de $\sin\theta_m$, qui est une droite de pente a. On trouve $\boxed{a = 1{,}828 \pm 0{,}001\ \mu\text{m}}$.

g) Les deux variables étant θ_m et i : $a(\cos\theta_m\,\mathrm{d}\theta_m - \cos i\,\mathrm{d}i) = 0$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}i} = \dfrac{\cos i}{\cos\theta_m}$. Or $D_m = \theta_m - i$ donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}i} = \dfrac{\cos i}{\cos\theta_m} - 1}$.

D_m est extrémale lorsque $\dfrac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}i} = 0$ soit $\cos\theta_m = \cos i$. Cela peut correspondre à $\theta_m = i$, mais ceci n'est possible que pour $m = 0$ (et dans ce cas, $D_0 = 0, \forall i$). Pour $m \neq 0$, la solution est donc $\boxed{\theta_m = -i}$. Dans ce cas, la relation (1) devient $2a\sin\theta_m = m\lambda$; et $D_{m,\min} = 2\theta_m$, donc $\boxed{\sin\dfrac{D_{m,\min}}{2} = \dfrac{m\lambda}{2a}}$.