

Corrigé du devoir test de physique n° 3

□ **Exercice** (Mines-Ponts PC 2019)

19. L'expérience courante montre qu'un liquide devient plus visqueux lorsqu'il se refroidit : chocolat ou beurre fondu, lave de volcan... Cela peut s'expliquer au niveau microscopique : les molécules ayant une agitation thermique moins grande restent plus liées entre elles. Donc la viscosité de l'eau liquide de l'Arctique est plus élevée que celle de l'eau à température ambiante.

20. Le poids d'une masse dm est $d\vec{P} = dm \vec{g}_0 = -dm g_0 \vec{e}_z$, soit $\vec{p}_m = -g_0 \vec{e}_z$ par unité de masse. Le force d'inertie de Coriolis est $d\vec{F}_{ic} = -dm \vec{a}_c = -2dm \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T} = -2dm \frac{2\pi}{T_0} \vec{e}_z \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y) = -2dm \frac{2\pi}{T_0} (v_x \vec{e}_y - v_y \vec{e}_x)$, soit $\vec{f}_{ic,m} = \frac{4\pi}{T_0} (v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y)$.

Les forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement de la Terre sont incluses dans le poids.

21. Équation de Navier–Stokes dans le référentiel terrestre non galiléen : $\rho_e \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \rho_e \vec{g}_0 + \eta_e \Delta \vec{v} + \rho_e \vec{f}_{ic,m}$ soit $\rho_e \left(\vec{0} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v}(z) \right) = -\text{grad} P - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e (\Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y) + \rho_e \frac{4\pi}{T_0} (v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y)$. Le membre de gauche est nul, il reste :

$$\vec{0} = -\text{grad} P - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e \left(\frac{d^2 v_x}{dz^2} \vec{e}_x + \frac{d^2 v_y}{dz^2} \vec{e}_y \right) + \rho_e \frac{4\pi}{T_0} (v_y(z) \vec{e}_x - v_x(z) \vec{e}_y)$$

de z , et le terme de poids est une constante ; le dernier terme $-\text{grad} P$ ne dépend donc que de z également, donc P ne dépend que de z .

Projection sur \vec{e}_z : $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_e g_0$ d'où $P(z) = -\rho_e g_0 z + A$. À la surface, $P(0) = P_0 = A$, d'où finalement $P(z) = P_0 - \rho_e g_0 z$.

22. Projections sur \vec{e}_x et \vec{e}_y : $0 = \eta_e \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \rho_e \frac{4\pi}{T_0} v_y$ soit $\frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{1}{\delta^2} v_y = 0$ (1) avec $\delta = \sqrt{\frac{\eta_e T_0}{4\pi \rho_e}}$; de même $\frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{1}{\delta^2} v_x = 0$ (2).

23. On introduit une fonction complexe $\underline{v} = v_x + i v_y$. Alors (1) + i (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{d^2 v_x}{dz^2} + i \frac{d^2 v_y}{dz^2} \right) + \frac{1}{\delta^2} (v_y - i v_x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \underline{v}}{dz^2} - \frac{i}{\delta^2} \underline{v} = 0$.

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i}{\delta^2} = 0$ soit $r^2 - \frac{(1+i)^2}{2\delta^2} = 0$ d'où $r = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}\delta}$. La solution complexe est donc

$\underline{v}(z) = \underline{B} \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\delta} z\right) + \underline{C} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}\delta} z\right) = \underline{B} \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \exp\left(\frac{iz}{\sqrt{2}\delta}\right) + \underline{C} \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \exp\left(-\frac{iz}{\sqrt{2}\delta}\right)$. Or le second terme divergerait lorsque $z \rightarrow -\infty$, donc $\underline{C} = 0$. Et en $z = 0$, $v_x(0) = v_0$ et $v_y(0) = 0$ donc $\underline{v}(0) = v_0 = \underline{B}$. Finalement : $v_x(z) = \text{Re}[\underline{v}(z)]$ soit

$$v_x(z) = v_0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right), \text{ et } v_y(z) = \text{Im}[\underline{v}(z)] \text{ soit } v_y(z) = v_0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right)$$

La rotation du vecteur vitesse est importante sous la surface, puis s'atténue avec la profondeur.

□ **Problème 1** (Centrale-Supélec MPI 2023)

Q1. Si on note d la diagonale, a la longueur et b la largeur du capteur : $d^2 = a^2 + b^2$. De plus il y a 4000×3000 pixels carrés, donc $a = 4b/3$. On en déduit $b = 3d/5$ et $a = 4d/5$. AN $b = 5,1 \text{ mm}$ et $a = 6,8 \text{ mm}$. La taille d'un pixel est donc $p = 1,7 \mu\text{m}$.

Q2. La tache de diffraction est donnée par un cône de demi-angle θ tel que $\sin \theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx \theta$. Pour un point objet à l'infini, le capteur est

à la distance f' de l'ouverture, donc le diamètre de la tache est : $t = 2f' \tan \theta \approx 2f' \theta = 2f' \frac{\lambda}{D}$ soit $t = 2\lambda N$. AN $t = 2,6 \mu\text{m}$ pour

une longueur d'onde de 600 nm (vers le milieu du spectre visible) ou $t = 2,2 \mu\text{m}$ pour 510 nm (maximum de sensibilité de l'œil).

C'est un peu plus grand que la taille d'un pixel : il serait donc inutile de faire des pixels encore plus petits.

Q3. L'utilisation de 4 fois moins de pixels permet de diminuer la taille des fichiers d'images, sans diminuer la qualité perceptible dans la plupart des cas.

Q4. Loi de Snell–Descartes en K : $n \sin i = \sin t$. Pour que le rayon réfracté existe toujours, il faut que ce calcul donne toujours $\sin t \leq 1$,

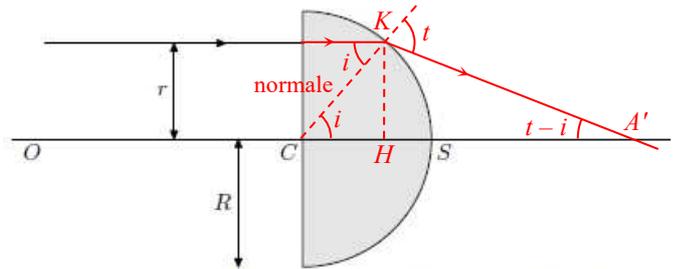
ce qui suppose $\sin i \leq \frac{1}{n}$. Or $r = R \sin i$, donc $r \leq \frac{R}{n} = r_0$.

AN $r_0 = 2,6 \text{ mm}$ soit un diamètre de 5,2 mm.

Le diamètre $\Phi = 5 \text{ mm}$ est proche de la valeur optimale, légèrement inférieur (si c'est bien 5,0 mm), donc aucun rayon n'est perdu. (On a donc coupé les bords de la demi-boule, de diamètre 8 mm.)

Q5. $\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'} = CH + HA'$ avec $CH = R \cos i$ et $HA' = \frac{HK}{\tan(t-i)} = \frac{R \sin i}{\tan(t-i)}$, d'où $\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t-i)}$.

Q6. Si $r \rightarrow 0$, alors $i \rightarrow 0$ et $t \rightarrow 0$ également, donc $n i \approx t$ et $\overline{CA'} \rightarrow R + \frac{Ri}{t-i} = R + \frac{R}{n-1}$ soit $\overline{CF'} = \frac{nR}{n-1}$. AN $\overline{CF'} = 12 \text{ mm}$.



Q7. Les rayons venant d'un point A à l'infini sur l'axe sont justement les rayons parallèles à l'axe optique, étudiés ci-dessus ; ils satisfont déjà la première condition de Gauss (angle faible avec l'axe optique). Il faut satisfaire aussi la seconde conditions de Gauss, que les rayons incidents arrivent sur la lentille près de l'axe optique (donc r suffisamment faible) pour que tous ces rayons convergent en F' : celui-ci est alors le conjugué de A , appelé le foyer image principal de la lentille.

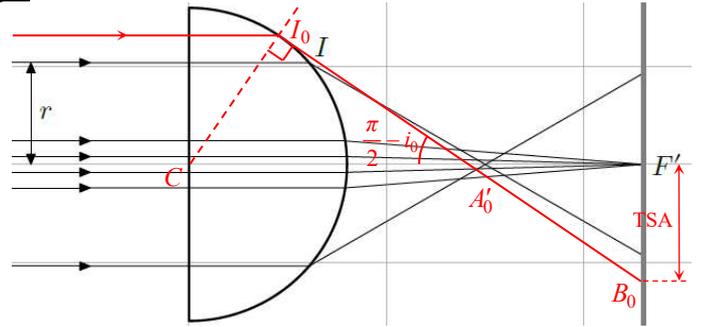
Q8. Le rayon à la distance r_0 est celui pour lequel l'angle de réfraction est $t_0 = \frac{\pi}{2}$: l'angle en A'_0 est donc $\frac{\pi}{2} - i_0$.

Alors $F'B_0 = A'_0F' \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - i_0\right) = \frac{A'_0F'}{\tan i_0}$ avec $A'_0F' = CF' - CA'_0$

$= \frac{nR}{n-1} - R \cos i_0 - R \sin i_0 \tan i_0$ (calculs de la question Q5)

soit $F'B_0 = \frac{nR}{n-1} - R \cos i_0 - R \frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0} = \frac{nR}{n-1} - \frac{R}{\cos i_0}$

et finalement $F'B_0 = \left(\frac{nR}{n-1} - \frac{R}{\cos i_0}\right) \frac{1}{\tan i_0}$ avec $\sin i_0 = \frac{1}{n}$. AN $i_0 = 41,1^\circ$ et $F'B_0 = 7,3 \text{ mm}$.



Cette distance TSA est donc beaucoup plus grande que la taille d'un pixel : la lentille demi-boule n'est pas adaptée ici.

Q9. Les deux chemins optiques depuis la source doivent être égaux :

$(S_\infty K F') = (S_\infty C F') \Leftrightarrow (S_\infty K) + (KI) + (IF') = (S_\infty C) + (CJ) + (JF')$

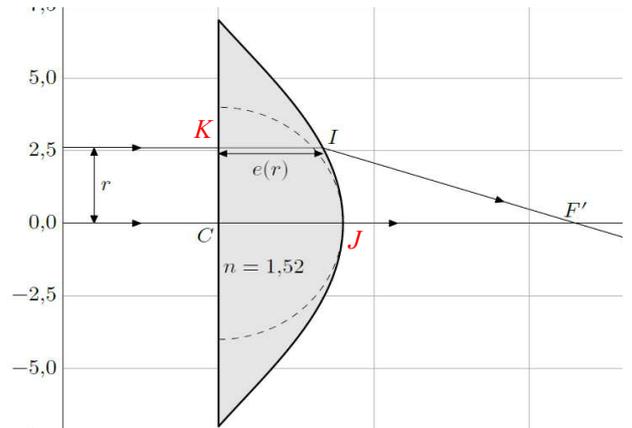
Or l'onde est plane à gauche, d'après le théorème de Malus, donc C et K sont sur la même surface d'onde, soit $(S_\infty K) = (S_\infty C)$.

Il reste $(KI) + (IF') = (CJ) + (JF') \Leftrightarrow n e(r) + IF' = nR + JF'$

$\Leftrightarrow n e(r) + \sqrt{r^2 + (CF' - e(r))^2} = nR + CF' - R$

$\Leftrightarrow n e(r) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{nR}{n-1} - e(r)\right)^2} = nR + \frac{nR}{n-1} - R$

et finalement $n e(r) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{nR}{n-1} - e(r)\right)^2} = nR + \frac{R}{n-1}$.



▣ **Problème 2** (CCINP PC 2020)

Q1. Une ligne de courant est une courbe tangente au champ de vitesse en chacun de ses points : c'est une notion eulérienne puisqu'elle fait appel à la notion de champ de vitesse.

Q2. Les quatre hypothèses permettent d'appliquer la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant : $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte}$ (en négligeant l'effet du poids). Elles impliquent aussi la conservation du débit volumique : ainsi la vitesse est plus élevée là où les lignes de courant sont plus resserrées, c'est-à-dire au-dessus de l'aile. Alors la pression est plus faible au-dessus de l'aile qu'au-dessous, la résultante des forces de pression est donc orientée vers le haut, ce qui constitue une force de portance.

Q3. D'après les arguments précédents, le coefficient de pression est plus faible au-dessus de l'aile, or C_{p1} est plus faible que C_{p2} (attention, valeurs négatives en haut !) donc la courbe C_{p1} correspond à l'extrados, C_{p2} à l'intrados.

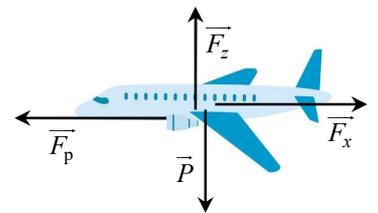
Q4. D'après la relation de Bernoulli sur une ligne de courant : $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$ d'où $\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = 1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}$ soit $C_p \leq 1$.

Q5. $\dim C_z = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2 \cdot (M \cdot L^{-3}) \cdot (L \cdot T^{-1})^2}$ soit $\boxed{\dim C_z = 1}$: c'est bien une grandeur adimensionnée.

Q6. Le coefficient de portance augmente avec l'écart entre les coefficients de pression de l'extrados et de l'intrados : il est donc beaucoup plus grand sous l'incidence de 6° .

Q8. L'avion volant à vitesse constante, la somme de toutes les forces est nulle.

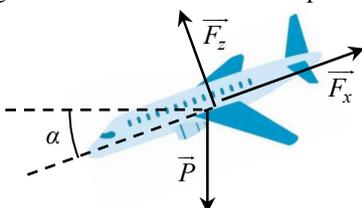
Le poids \vec{P} est compensé par la force de portance \vec{F}_z , et la force de traînée \vec{F}_x est compensée par la force propulsive \vec{F}_p exercée par les réacteurs.



Q9. À haute altitude, la masse volumique de l'air est plus faible. Pour garder la même portance (et ainsi compenser le poids), il faut garder le même produit $\rho_\infty v_\infty^2$, donc augmenter la vitesse.

Mais de cette façon on garde aussi la même valeur de la traînée, donc la même force propulsive : ainsi la même consommation de carburant permet d'aller plus vite. Par ailleurs, le vol en haute altitude permet de se placer au-dessus des nuages et ainsi d'éviter les intempéries ; et en cas d'accident, il donne plus de temps pour planer avant d'arriver au sol.

Q10.



Cette fois il n'y a plus de force propulsive, donc $\vec{F}_x + \vec{F}_z + \vec{P} = \vec{0}$.

Projection sur \vec{u}_x : $F_z \sin \alpha - F_x \cos \alpha = 0$ d'où $\tan \alpha = \frac{F_x}{F_z} = \frac{C_x}{C_z}$ soit $\boxed{\tan \alpha = \frac{1}{f}}$.

Quand l'avion perd une altitude d_V , il a avancé de $d_H = \frac{d_V}{\tan \alpha} = f \cdot d_V$. Ainsi la finesse indique la capacité de planer sur une longue distance avant de toucher le sol.

Q13. La vitesse \vec{v}_T de l'avion dans le référentiel terrestre doit être dirigée de A vers B , donc avoir une composante nulle sur \vec{u}_x . Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_T = \vec{V}_a + \vec{v}_v$. Projection sur \vec{u}_x : $0 = +V_a \sin \theta - v_v \sin \varphi$.

Q14. $\theta = \arcsin\left(\frac{v_v}{V_a} \sin \varphi\right)$. AN $\theta = 2,5^\circ$.

Q15. À l'aller, la vitesse selon \vec{u}_y est $V_a \cos \theta - v_v \cos \varphi$, donc la durée de l'aller est $T_1 = \frac{d}{V_a \cos \theta - v_v \cos \varphi}$. Au retour, la vitesse

selon \vec{u}_y devient $-V_a \cos \theta - v_v \cos \varphi$, d'où une durée $T_2 = \frac{d}{V_a \cos \theta + v_v \cos \varphi}$. Au total : $T = \frac{d}{V_a \cos \theta - v_v \cos \varphi} + \frac{d}{V_a \cos \theta + v_v \cos \varphi}$.

AN $T = 8200 \text{ s} = 2 \text{ h } 17 \text{ min}$. En l'absence de vent, la durée serait $T' = 2 \frac{d}{V_a}$. AN $T' = 8100 \text{ s} = 2 \text{ h } 15 \text{ min}$. L'écart est faible : le

vent freine l'avion à l'aller, mais il le pousse au retour.

Q16. L'énergie cinétique de l'avion passe de 0 à $\frac{1}{2} m v_f^2 = 1,3 \text{ GJ}$. On peut supposer en première approximation que la force de traînée est négligeable devant la force des propulseurs. Alors l'énergie cinétique trouvée est égale au travail que doivent fournir les quatre réacteurs, c'est-à-dire $\frac{1}{2} m v_f^2 = 4F \times L$ en notant L la longueur de la piste. Si on estime celle-ci à 2 km, on obtient $F \approx 160 \text{ kN}$.

La finesse étant proche de 10, la force de traînée est en fait de l'ordre de 1/10 de la portance en vol, c'est-à-dire 1/10 du poids de l'avion, soit 500 kN, ce qui n'est pas négligeable devant la force des réacteurs (640 kN dans notre modèle simple). Si on en tient compte, il faudrait ajouter 500 kN à la force totale des réacteurs, ce qui donne $F \approx 290 \text{ kN}$ pour chaque réacteur : ceci est bien inférieur à la poussée maximale des réacteurs de l'Airbus A380.

Q17. Le point F est un point d'arrêt pour la ligne de courant centrale.

Q18. Donc $v_F = 0$, et en G l'écoulement n'est plus perturbé donc on retrouve $v_G = v_\infty$. Le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant

de F s'écrit alors : $P_F = P_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2$. Et sur celle de G :

$$P_G + \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 \text{ d'où } P_G = P_\infty.$$

Q19. Le liquide, qu'on peut supposer incompressible, est à l'équilibre dans le tube : $P_H - P_I = \rho_l g h$ (loi de l'hydrostatique).

Q20. Or $P_F = P_H$ et $P_G = P_I$, d'où $v_\infty = \sqrt{2 \frac{\rho_l}{\rho_\infty} g h}$. Quand la vitesse augmente, h augmente.

Q25, 26. La quantité de mouvement étant extensive : $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_e \vec{v}_e$ et $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s$.

Q27. $\frac{d\vec{p}^*(t)}{dt} = \frac{\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t)}{dt}$. Or en régime stationnaire, $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t)$ et $\delta m_s = \delta m_e = D_m dt$, donc $\frac{d\vec{p}^*(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$.

Q28. Le système est soumis à la force exercée par le réacteur (pièces mobiles et fixes) et aux forces de pression en entrée et en sortie exercées par les gaz extérieurs au système (le poids étant toujours négligé).

Q29. Théorème de la quantité de mouvement pour ce système fermé : $\frac{d\vec{p}^*(t)}{dt} = \vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} + \vec{F}_{p,e} + \vec{F}_{p,s}$. Les forces de pression, de sens

opposés, se compensent au moins en partie. Si on néglige leur résultante devant la force du réacteur, il reste : $\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$.

Q30. D'après le principe des actions réciproques, $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{avion}} = -\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m (\vec{v}_e - \vec{v}_s)$. Pour que cette force soit propulsive, c'est-à-dire de sens opposé aux vitesses \vec{v}_e et \vec{v}_s , il faut que $v_s > v_e$ (on éjecte les gaz brûlés à grande vitesse).

