Ém1 – Corrigé des exercices 1, 2, 3, 5

¤ Exercice 1

a) $<\rho>=\dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\mathrm{d}\,r=\frac{\rho_0}{R}\left[r-\frac{r^3}{3R^2}\right]_0^R$ soit $\boxed{<\rho>=\dfrac{2\rho_0}{3}}$.

b) $Q=\displaystyle\iiint_V \rho(r)\,\mathrm{d}\,\tau=\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\varphi=\rho_0\int_{r=0}^{R}\left(r^2-\frac{r^4}{R^2}\right)\mathrm{d}\,r\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$

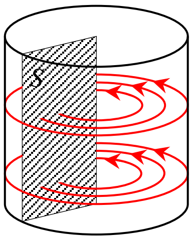
$=\rho_0\left[\dfrac{r^3}{3}-\dfrac{r^5}{5R^2}\right]_0^R\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=\rho_0\times\dfrac{2R^3}{15}\times2\times2\pi$ soit $\boxed{Q=\dfrac{8}{15}\pi\rho_0R^3}$. Densité moyenne : $\rho_{\mathrm{m}}=\dfrac{Q}{V}=\dfrac{\frac{8}{15}\pi\rho_0R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ soit $\boxed{\rho_{\mathrm{m}}=\dfrac{2\rho_0}{5}}$.

Dans le calcul de $<\rho>$, on intègre sur un rayon de la boule donc toutes les valeurs de r ont le même poids.

Mais dans le calcul de ρ_{m}, plus les points sont proches de la périphérie de la boule, où la densité est plus faible, plus ils sont nombreux, donc plus leur poids dans le calcul de l'intégrale est grand. Ainsi on doit bien trouver ρ_{m} plus petite que $<\rho>$.

¤ Exercice 2

a)



b) $I(t)=\displaystyle\iint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,s=\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{H}A\sin(\omega t)\,r\,\overrightarrow{e_\theta}\cdot\overrightarrow{e_\theta}\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,z=A\sin(\omega t)\int_{r=0}^{R}r\,\mathrm{d}\,r\int_{z=0}^{H}\mathrm{d}\,z$ soit $\boxed{I(t)=A\sin(\omega t)\dfrac{HR^2}{2}}$. Valeur efficace : $\boxed{I_{\mathrm{eff}}=\sqrt{\langle I(t)^2\rangle}=\dfrac{AHR^2}{2\sqrt{2}}}$.

¤ Exercice 3

a) Nombre d'électrons par unité de volume : $\boxed{n^*=\dfrac{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}\rho}{M}}$. AN $\boxed{n^*=5{,}85\cdot10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}}$.

b) Loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j}=\gamma\vec{E}}$ où $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant, $\vec{E}$ le champ électrique appliqué au conducteur, et γ la conductivité électrique. La démonstration (voir cours) conduit à : $\boxed{\gamma=\dfrac{n^*e^2\tau}{m_{\mathrm{e}}}}$.

c) $\boxed{\tau=\dfrac{\gamma m_{\mathrm{e}}}{n^*e^2}}$. AN $\boxed{\tau=3{,}8\cdot10^{-14}\ \mathrm{s}}$. En régime variable, la loi d'Ohm est valable si le temps caractéristique du régime (période…) est beaucoup plus long que le temps de relaxation τ : ainsi, on peut toujours considérer que la vitesse $\vec{v}$ proportionnelle à $\vec{E}$ s'établit instantanément. Pour un régime périodique, $T\ll\tau$ équivaut à $\boxed{f\ll\dfrac{1}{\tau}=2{,}6\cdot10^{13}\ \mathrm{Hz}=26\ \mathrm{THz}}$: cette condition est vérifiée dans tous circuits électroniques alimentés par des générateurs.

d) $\boxed{v=\dfrac{e\tau E}{m_{\mathrm{e}}}}$. AN $\boxed{v=67\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$. C'est une vitesse qui nous paraît plutôt lente !

e) v est extrêmement faible par rapport à la vitesse quadratique moyenne $\boxed{u=\sqrt{\dfrac{3RT}{M_{\mathrm{e}}}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{e}}}}=1{,}2\cdot10^5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$.

f) $\left\|\overrightarrow{F_{\mathrm{m}}}\right\|\ll\left\|\overrightarrow{F_{\mathrm{e}}}\right\|\Leftrightarrow evB\ll eE\Leftrightarrow\boxed{B\ll\dfrac{E}{v}}$. AN $\boxed{B\ll150\ \mathrm{T}}$. Or le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 10^{-5} T, et les champs technologiques dépassent très rarement 10 T, donc l'approximation est <u>toujours vérifiée</u> pour ce métal.

¤ Exercice 5

a) L'équation différentielle est : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}+\dfrac{1}{\tau}\vec{v}=\dfrac{q}{m}\vec{E}(t)}$ (voir cours).

b) On injecte la fonction $\underline{\vec{v}}(t)=\underline{\vec{V}}\exp(j\omega t)$ dans l'équation différentielle, le champ électrique étant lui aussi écrit sous forme complexe : $j\omega\underline{\vec{V}}\exp(j\omega t)+\dfrac{1}{\tau}\underline{\vec{V}}\exp(j\omega t)=\dfrac{q}{m}\overrightarrow{E_{\mathrm{m}}}\exp(j\omega t)\Leftrightarrow j\omega\underline{\vec{V}}+\dfrac{1}{\tau}\underline{\vec{V}}=\dfrac{q}{m}\overrightarrow{E_{\mathrm{m}}}$ d'où $\boxed{\underline{\vec{V}}=\dfrac{\tau q\overrightarrow{E_{\mathrm{m}}}/m}{1+j\omega\tau}}$.

Alors le vecteur densité de courant peut s'écrire de même $\underline{\vec{j}}(t)=\underline{\vec{J}}\exp(j\omega t)$, avec $\underline{\vec{J}}=n^*q\underline{\vec{V}}=\dfrac{n^*\tau q^2\overrightarrow{E_{\mathrm{m}}}}{m(1+j\omega\tau)}$. Ceci est de la forme $\underline{\vec{J}}=\underline{\gamma}\overrightarrow{E_{\mathrm{m}}}$ avec une conductivité complexe $\boxed{\underline{\gamma}=\dfrac{n^*\tau q^2}{m(1+j\omega\tau)}=\dfrac{\gamma_{\mathrm{statio}}}{1+j\omega\tau}}$.

En basse fréquence $\left(\omega\ll\dfrac{1}{\tau}\right)$: $\boxed{\underline{\gamma}\to\dfrac{n^*\tau q^2}{m}=\gamma_{\mathrm{statio}}}$ (valeur réelle obtenue en régime stationnaire). En haute fréquence $\left(\omega\gg\dfrac{1}{\tau}\right)$: $\boxed{\underline{\gamma}\to\dfrac{n^*\tau q^2}{j\omega\tau}=\dfrac{\gamma_{\mathrm{statio}}}{j\omega\tau}}$; c'est une valeur imaginaire pure, correspondant à un déphasage de $\pi/2$ entre le champ excitateur $\vec{E}(t)$ et la réponse en courant $\vec{j}(t)$; par ailleurs son module tend vers 0 (il n'y a pratiquement plus de courant à très haute fréquence).