Exercices du chapitre On1

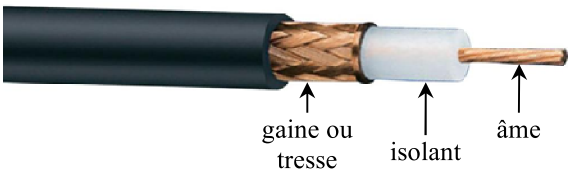
Équation de D'Alembert et énergie

1. Transport d'énergie par une onde sur une corde
On considère une corde vibrante de masse linéique μ, tendue selon l'axe (Ox) avec une tension T. Les déplacements de la corde s'effectuent selon (Oy) et sont repérés par $y(x,t)$. On note $T_y(x,t)$ la composante selon (Oy) de la force $\vec{T}(x,t)$ exercée par la partie de la corde d'abscisse *inférieure* à x sur la partie d'abscisse supérieure à x. Enfin on note $v_y(x,t) = \dot{y}(x,t)$ la vitesse de la corde parallèlement à (Oy).

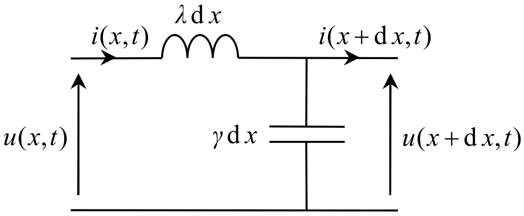
a) Établir l'équation d'onde vérifiée par $y(x,t)$ en rappelant les hypothèses qu'elle suppose.
b) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}(x,t)$ fournie par la partie de la corde d'abscisse inférieure à x sur la partie d'abscisse supérieure à x.
c) Trouver les deux relations couplées reliant, d'une part $\dfrac{\partial T_y}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial v_y}{\partial x}$, et d'autre part $\dfrac{\partial T_y}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v_y}{\partial t}$. En déduire l'expression d'une quantité $e(x,t)$ vérifiant l'équation $\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \dfrac{\partial e}{\partial t} = 0$. Quel type d'équation reconnaît-on ?
d) Montrer que $e(x,t)$ a la dimension d'une énergie par unité de longueur. On appelle $e(x,t)$ la *densité linéique d'énergie associée à l'onde*. Elle comporte un terme associé à l'énergie cinétique de la corde et un terme associé à l'énergie potentielle de déformation : identifier ces deux termes.
e) Montrer que pour une onde progressive vers les x positifs, e est la somme de deux termes égaux. Cette propriété est-elle encore vraie pour une onde progressive dans le sens des x négatifs ? pour une onde quelconque ?

Équation de D'Alembert et conditions aux limites

2. Coefficient de réflexion au bout d'un câble coaxial
Un câble coaxial est constitué de deux fils conducteurs parallèles « l'un dans l'autre », les deux étant séparés par un isolant en matière plastique.



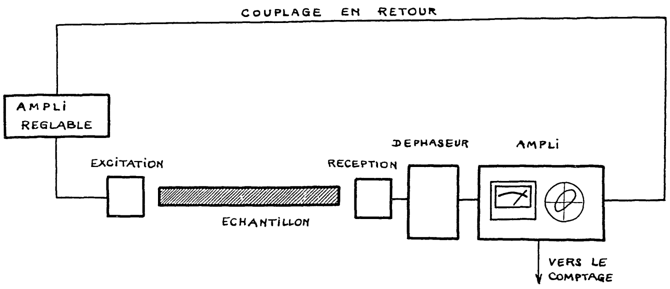
Entre les deux conducteurs, la capacité par unité de longueur du câble est $\gamma = 97\ \mathrm{pF \cdot m^{-1}}$. Et le câble possède également une inductance par unité de longueur $\lambda = 0{,}23\ \mathrm{\mu H \cdot m^{-1}}$.
Lorsqu'on connecte une extrémité du câble coaxial à un générateur (GBF) fournissant une tension périodique, une onde électrique se propage le long du câble et transmet le signal à l'autre extrémité, connectée à un circuit ou à un oscilloscope.
On se propose de déterminer l'équation de propagation de cette onde. Pour cela, on raisonne sur un élément de longueur $\mathrm{d}x$ du câble, modélisé selon le schéma ci-dessous.



a) Par application des lois des circuits, établir deux équations aux dérivées partielles couplées, d'ordre 1, vérifiées par la tension $u(x,t)$ et l'intensité $i(x,t)$.
b) En déduire l'équation de propagation de l'onde de tension, et calculer la célérité c de cette onde. Quel est l'indice de réfraction de l'isolant présent dans ce câble ?
c) Pour une onde progressive harmonique vers les x positifs, établir la relation : $u(x,t) = Z_\mathrm{c}\, i(x,t)$ où Z_c est une constante réelle positive que l'on exprimera en fonction de γ et λ. Que devient cette relation pour une OPH allant vers les x négatifs ?

Une OPH se propage depuis $x \to -\infty$ jusqu'à l'extrémité du câble coaxial, en $x = 0$, reliée à un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$. Lorsque l'onde arrive à cette extrémité, elle donne naissance à une onde réfléchie. L'onde d'intensité en un point quelconque peut alors s'écrire, en notation complexe :
$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_\mathrm{i} \exp[j(\omega t - kx)] + \underline{I}_\mathrm{r} \exp[j(\omega t + kx)]$$
d) En déduire la forme complexe de l'onde de tension.
e) Écrire la condition aux limites en $x = 0$, et en déduire les coefficients de réflexion en intensité et en tension, définis par :
$$\underline{r}_i = \frac{\underline{I}_\mathrm{r}}{\underline{I}_\mathrm{i}} \text{ et } \underline{r}_u = \frac{\underline{U}_\mathrm{r}}{\underline{U}_\mathrm{i}}.$$
f) Déterminer les valeurs de $\underline{r}_u$ obtenues pour $\underline{Z} = 0$ et pour $\underline{Z} \to \infty$. Comment réaliser ces deux impédances ?
g) Que se passe-t-il si on choisit $\underline{Z} = Z_\mathrm{c}$? Est-ce intéressant ?

3. Détermination du module de Young du graphite
Dans l'industrie nucléaire, on utilise du graphite en barres comme *modérateur* (absorbeur de neutrons) dans les réacteurs. Le module de Young E de ce matériau est une propriété importante pour prévoir son comportement en situation. La méthode proposée par François PATTOU et Jean-Claude TRUTT en 1963 consiste à créer une onde stationnaire longitudinale auto-entretenue au moyen d'une boucle de rétroaction.



(F. Pattou, J.-C. Trutt, Rapport CEA n° 2243, 1963)

La détermination de la fréquence propre (fondamentale) de cette onde permet de calculer le module de Young.
On prend (Ox) comme axe longitudinal de la barre, de section S et de longueur L. On note $\xi(x,t)$ le déplacement dans cette direction de la tranche de graphite se trouvant à l'abscisse x au repos, et $F_x(x,t)\vec{e_x}$ la force de traction/compression exercée par la partie de la barre à droite de x sur celle à gauche.
a) Établir l'équation de D'Alembert vérifiée par $\xi(x,t)$, et préciser l'expression de la célérité c en fonction de E et de la masse volumique ρ du graphite.
b) Pour une onde stationnaire, donner sans démonstration la forme mathématique de $\xi(x,t)$; en déduire celle de $F_x(x,t)$.
c) La barre étant libre aux deux extrémités, quelles sont les conditions aux limites ? En déduire l'expression des fréquences propres f_n en fonction de L, c et d'un entier n.
d) Pour une barre de longueur $L = 80{,}0$ mm faite avec un échantillon de graphite de faible densité (masse volumique $\rho = 1610\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$), Pattou et Trutt ont mesuré une fréquence fondamentale $f_1 = 11{,}78$ kHz. Déterminer le module de Young E de ce graphite.

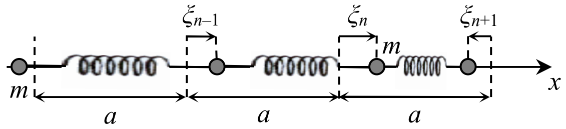
Autre établissement d'une équation de D'Alembert

4. Onde acoustique dans un solide

On se propose d'établir l'équation de D'Alembert pour une onde acoustique unidimensionnelle dans un solide, en raisonnant à l'échelle atomique.

On suppose que les atomes du solide, de masse m, forment un réseau cubique de période a (paramètre de maille). L'interaction entre deux atomes voisins est modélisée par un ressort de longueur à vide a et de coefficient de raideur k.

Pour une onde unidimensionnelle selon l'axe (Ox), on peut se contenter de considérer des atomes voisins sur une seule ligne parallèle à cet axe. On numérote ces atomes avec un entier n ; le n-ième atome se trouve à l'abscisse na à l'équilibre. En présence d'une onde, son déplacement par rapport à sa position d'équilibre est noté $\xi_n(t)$, donc son abscisse devient $x_n(t) = na + \xi_n(t)$.



a) Établir l'équation différentielle reliant ξ_n, ξ_{n-1}, ξ_{n+1}, m et k.

On modélise maintenant le solide comme un milieu continu, le déplacement local étant une fonction notée $\xi(x,t)$, telle que $\xi_n(t) = \xi(na,t)$.

b) À l'aide de développements de Taylor d'ordre 2, exprimer les déplacements $\xi((n+1)a,t)$ et $\xi((n-1)a,t)$ en fonction de a (considéré comme un infiniment petit) et de ξ et ses dérivées au point na.

c) Montrer alors que l'équation différentielle de la question a devient, par passage au continu, une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Donner l'expression de c en fonction de a, k et m. Que représente cette grandeur ?

d) Vérifier que cette expression s'identifie à celle trouvée avec la modélisation macroscopique (dans la partie 3.b du cours et l'exercice 3).

☞ *Réponses partielles*

1. b) $\mathcal{P}(x,t) = \vec{T}\cdot\vec{v} = T_y(x,t)\,v_y(x,t)$. c) $e(x,t) = \frac{1}{2}\mu\, v_y(x,t)^2 + \frac{1}{2T}T_y(x,t)^2$.

2. b) $n = 1{,}4$. **3.** d) $E = 5{,}72$ GPa.

4. a) $m\frac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n)$.