

Ém5 – Corrigé des exercices 1 et 3

□ Exercice 1

a) La distribution de charges et de courants est à symétrie sphérique : un point M de l'espace appartient à une infinité de plans de symétrie de cette distribution, qui sont tous les plans contenant (OM) . Par conséquent, le champ électrique est parallèle à tous ces plans, soit $\vec{E}(M,t) = E_r(M,t)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques ; et le champ magnétique est orthogonal à tous ces plans, soit $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$. Et comme il y a invariance par rotation autour de tout axe passant par O , E_r est indépendant de θ et de φ : $\vec{E}(M,t) = E_r(r,t)\vec{e}_r$.

b) Le théorème de Gauss est toujours valable en régime variable, donc on obtient comme en électrostatique : $\vec{E}(M,t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

pour $r > R$, c'est-à-dire dans l'air extérieur. Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ donc ici $\vec{\Pi} = \vec{0}$.

c) Pour trouver une équation différentielle pour $Q(t)$ il suffit d'en trouver une pour le champ $\vec{E}(M,t)$. Pour cela, la seule équation de Maxwell utile est celle de Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{0}$. On combine avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$:

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \gamma \vec{E} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} Q(t) = 0. \quad \text{Solution, avec la condition initiale } Q(0) = Q_0 : \quad Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{\epsilon_0}\right).$$

La durée de décharge est de l'ordre de quelques τ (par exemple 5τ) avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$. Pour l'évaluer il faut estimer un ordre de grandeur de la conductivité de l'air. Sachant que l'ordre de grandeur de γ peut aller de $10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ pour les meilleurs conducteurs à $10^{-20} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ pour les meilleurs isolants, on peut supposer par exemple que pour un air humide légèrement conducteur $\gamma \sim 10^{-14} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, ce qui donne une durée de décharge $5\tau \sim 10^3 \text{ s}$, soit quelques heures.

d) La puissance volumique fournie par les champs aux charges de l'air est $\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$, donc pour obtenir la puissance totale il faut intégrer sur tout le volume extérieur à la boule : $\mathcal{P} = \iiint_{\text{air ext}} \gamma E^2 d\tau = \int_{r=R}^{+\infty} \gamma \frac{Q(t)^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \gamma \frac{Q(t)^2}{4\epsilon_0^2} \int_{r=R}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}$ soit

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma Q(t)^2}{4\epsilon_0^2 R} = \frac{\gamma Q_0^2}{4\epsilon_0^2 R} \exp\left(-\frac{2\gamma t}{\epsilon_0}\right). \quad \text{Alors } W_{\text{ém}} = \int_{t=0}^{+\infty} \mathcal{P}(t) dt = \frac{\gamma Q_0^2}{4\epsilon_0^2 R} \int_{t=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2\gamma t}{\epsilon_0}\right) dt \quad \text{soit} \quad W_{\text{ém}} = \frac{Q_0^2}{8\epsilon_0 R}.$$

e) Si on fait un bilan énergétique sur l'ensemble de l'air environnant, comme il n'y a pas de flux externe (vecteur de Poynting nul), cette énergie cédée par le champ (et dissipée par effet Joule) est égale à la variation de l'énergie électromagnétique stockée :

$$\epsilon_{\text{ém}}(+\infty) - \epsilon_{\text{ém}}(0) = -W_{\text{ém}}. \quad \text{On vérifie ce bilan en calculant l'énergie stockée : } \epsilon_{\text{ém}}(t) = \iiint_{\text{air ext}} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau \quad \text{soit}$$

$$\epsilon_{\text{ém}}(t) = \int_{r=R}^{+\infty} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q(t)^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} + 0 \right) 4\pi r^2 dr = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{2\gamma t}{\epsilon_0}\right) \int_{r=R}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R} \exp\left(-\frac{2\gamma t}{\epsilon_0}\right) \quad \text{d'où} \quad \epsilon_{\text{ém}}(+\infty) - \epsilon_{\text{ém}}(0) = -\frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

□ Exercice 3

a) Les relations contenant la densité de charge sont l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et l'équation locale de conservation de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$. Pour les combiner on utilise la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$. Solution :

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec le temps de relaxation } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = 9 \cdot 10^{-19} \text{ s}. \quad \text{Le temps de disparition de l'excédent de charge est donc de l'ordre de } 10^{-18} \text{ s, c'est-à-dire inobservable, quel que soit l'instrument : le milieu reste toujours neutre.}$$

b) Densité volumique de courant de déplacement : $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc $j_d \sim \epsilon_0 \omega E = \epsilon_0 2\pi f E$. Alors $\frac{j_d}{j} \sim \frac{\epsilon_0 2\pi f}{\gamma}$. Pour $f < 1 \text{ THz}$ on trouve $\frac{j_d}{j} < 5 \cdot 10^{-6}$ donc j_d est négligeable devant j .

$$\text{c) Équations de Maxwell dans ce milieu : } \text{div } \vec{E} = 0 ; \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \text{div } \vec{B} = 0 ; \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \frac{1}{c^2 \tau} \vec{E}.$$

d) On utilise la formule d'analyse vectorielle $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$, soit $\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \text{grad}(0) - \Delta \vec{E} \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\Delta \vec{E}$

$$\text{et finalement } \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2 \tau} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad \text{On reconnaît une équation de diffusion, avec un coefficient de diffusion } D = c^2 \tau.$$