Devoir d'entraînement de physique n° 6

Cet énoncé comporte un problème et un exercice sur le programme de PCSI
(mécanique du solide, induction et forces de Laplace).

Problème

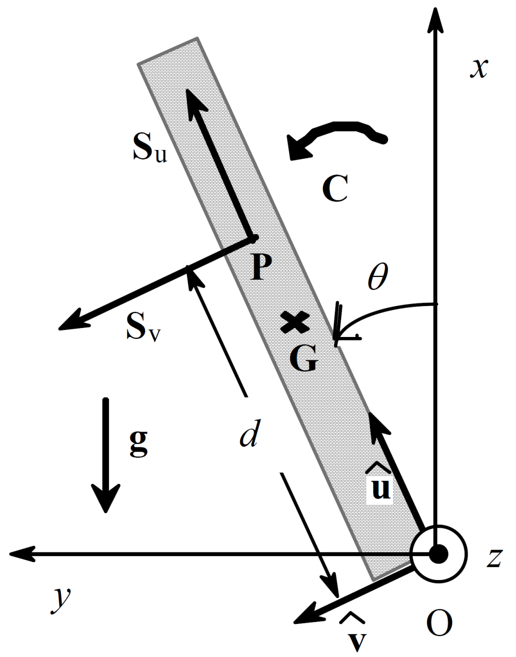
(Mines-Ponts MP 2005)

Chute d'une cheminée

Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse M, de longueur D et de rayon très petit devant D. Pour une raison quelconque (vent fort…), la cheminée commence à tomber, en faisant une rotation autour de sa base dans le plan vertical Oxy. On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale ; à l'instant t = 0, la cheminée est encore verticale ($\theta = 0$) et sa vitesse de rotation est négligeable ($\dot{\theta} = 0$).
On étudie le mouvement de la cheminée dans le référentiel terrestre, en projection sur la base mobile de coordonnées polaires $\vec{u}, \vec{v}, \vec{e_z}$ où $\vec{u}$ est porté par l'axe de la cheminée, et $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ dans le sens de rotation de l'angle θ.

On note G le centre de masse de la cheminée. Le moment d'inertie autour de l'axe Oz est $J_{Oz} = \frac{1}{3} M D^2$.

La cheminée est posée sur le sol et on peut considérer en O une liaison pivot parfaite.



1. Chute sans déformation

On suppose d'abord que la cheminée tombe dans se déformer.

1.1. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, déterminer l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ.

1.2. Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.

1.3. Déterminer, en fonction de la seule variable θ, les composantes R_u et R_v de la réaction du sol en O en projection sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1.4. La cheminée peut-elle décoller du sol pour une certaine valeur de θ ?

2. Déformation et cassure

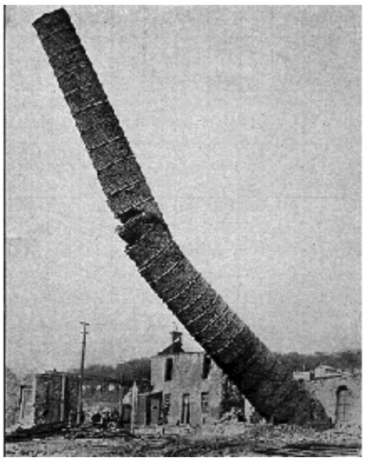
En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en O, l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée, en P (cette action assure la rigidité de la cheminée). Le contact en P n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur d est modélisée par une force $\vec{S}$ de composantes S_u et S_v et un couple $\vec{C}$ porté par l'axe horizontal Oz.

2.1. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la longueur d de cheminée, exprimer S_v en fonction de M, g, θ, d et D. La grandeur S_v est appelée *effort de cisaillement*.
Tracer qualitativement le graphe donnant S_v en fonction du rapport d/D (θ est donné).

2.2. Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement S_v est le plus important. Quel est ce point ?

2.3. Montrer que le théorème du moment cinétique en O, appliqué à la longueur d de cheminée, conduit à l'expression suivante du moment du couple $\vec{C}$: $\vec{C} = -\frac{1}{4} Mgd\left(\frac{d}{D}-1\right)^2 \sin\theta\, \vec{e_z}$.

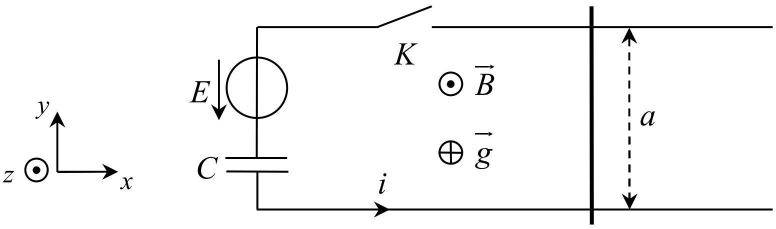
2.4. Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ? Commenter à ce sujet les deux photographies ci-dessous.



Exercice
Rails de Laplace avec condensateur

Une tige conductrice glisse sans frottements sur deux rails horizontaux distants de $a = 1$ m. Elle ferme électriquement un circuit comprenant un interrupteur K, un condensateur de capacité $C = 1$ mF et une source de tension de FÉM constante $E = 10$ V. La tige a une résistance $R = 100\ \Omega$ et une masse $m = 1$ g ; sa vitesse est notée $\vec{v} = v\vec{e_x}$.

L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$ avec $B = 1$ T.



Initialement, le condensateur est déchargé et la tige est immobile. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1. Calculer la force de Laplace s'exerçant sur la tige.

2. Déterminer l'équation mécanique reliant $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $i(t)$ et des constantes du système.

3. Calculer la force électromotrice d'induction e_{ind} en précisant son orientation.

4. Montrer que l'équation électrique d'évolution du système est : $-\frac{aB}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = +\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}i(t)$.

5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$.

6. Donner la solution $i(t)$, et calculer le temps de relaxation τ de ce système.