On1 – Corrigé de l'exercice 4

a) On applique le PFD à l'atome numéroté n, soumis aux forces d'interaction avec ses deux voisins (on néglige le poids) : $m\vec{a} = \vec{F}_{(n-1)\to n} + \vec{F}_{(n+1)\to n}$. Chaque force, modélisée comme celle d'un ressort, s'exprime selon la formule générale $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}}$. Pour le ressort de gauche : $\ell_0 = a$, $\ell = a + \xi_n - \xi_{n-1}$ et $\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}} = \vec{e_x}$ donc $\vec{F}_{(n-1)\to n} = -k(\xi_n - \xi_{n-1})\vec{e_x}$. Pour celui de droite : $\ell_0 = a$, $\ell = a + \xi_{n+1} - \xi_n$ et $\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}} = -\vec{e_x}$ donc $\vec{F}_{(n+1)\to n} = +k(\xi_{n+1} - \xi_n)\vec{e_x}$.

La projection du PFD sur $\vec{e_x}$ est donc : $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n)}$.

b) $\xi((n+1)a,t) = \xi(na,t) + a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t) + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$ et $\xi((n-1)a,t) = \xi(na,t) - a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t) + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$.

c) L'équation devient :
$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2\xi(na,t)}{\partial t^2} &= -k\big(\xi(na,t) - \xi((n-1)a,t)\big) + k\big(\xi((n+1)a,t) - \xi(na,t)\big) \\ &= -k\left(\cancel{+a\frac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)} - \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)\right) + k\left(\cancel{+a\frac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)\right) \\ &= +ka^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t) \end{aligned}$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = 0}$ (équation de D'Alembert) en posant $\boxed{c = a\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$: c'est la <u>célérité</u> de l'onde.

d) Avec un modèle macroscopique on a trouvé $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$. Or on a établi (voir cours) la relation $E = \dfrac{k}{a}$, et d'autre part $\rho = \dfrac{m}{a^3}$ (car chaque maille cubique de côté a contient un atome de masse m), donc les deux expressions sont bien identiques.