Exercices du chapitre On3

Onde électromagnétique dans un conducteur

1. Différentes formes d'ondes dans un métal

Le cuivre est un métal comportant une densité volumique $n^* = 8{,}5 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$ d'électrons libres ($-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C , $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg). L'interaction d'un électron avec le milieu est modélisée par une force $\vec{F_\mathrm{f}} = -m\vec{v}/\tau$ avec $\tau = 2{,}7 \cdot 10^{-14}$ s . Une OPPH polarisée rectilignement se propage dans ce métal : son champ électrique a pour expression complexe $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}_0 \exp i(\omega t - \underline{k} z)\vec{e_x}$.

a) Montrer, en précisant les hypothèses et les approximations, que l'on peut définir une conductivité complexe, que l'on mettra sous la forme : $\underline{\gamma} = \dfrac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$. Calculer γ_0 .

b) Établir la relation de dispersion pour cette onde, et la mettre sous la forme : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\dfrac{\omega_\mathrm{p}^2 \tau}{\omega(1 + i\omega\tau)}\right)$. Calculer ω_p .

c) Vérifier qu'on a $\omega \ll 1/\tau \ll \omega_\mathrm{p}$ pour les ondes hertziennes. Montrer alors que $\underline{k}$ peut s'écrire $(1-i)/\delta$, et en déduire la forme réelle de l'onde. Comment peut-on la qualifier ?

d) Vérifier qu'on a $1/\tau \ll \omega < \omega_\mathrm{p}$ pour la lumière visible. Montrer alors que $\underline{k}$ peut s'écrire $-i/\delta'$, et en déduire la forme réelle de l'onde. Comment peut-on la qualifier ?

e) Vérifier qu'on a $1/\tau \ll \omega_\mathrm{p} < \omega$ pour les ultraviolets lointains. Montrer alors qu'il y a propagation avec dispersion mais sans absorption.

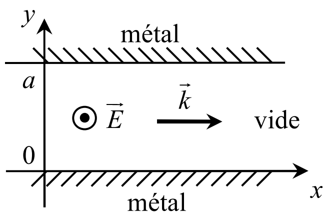
f) Vérifier qu'on a $1/\tau \ll \omega_\mathrm{p} \ll \omega$ pour les rayons γ. Montrer alors qu'il y a propagation sans dispersion ni absorption, comme dans le vide.

Dispersion due aux conditions aux limites

2. Onde électromagnétique dans un guide d'onde

Même pour une onde obéissant à l'équation de D'Alembert, la propagation peut être dispersive si les conditions aux limites imposent de chercher une solution sous une forme différente de celle d'une OPPH. On étudie ceci dans le cas d'un guide d'onde, sorte de « canalisation » constituée de quatre plaques métalliques planes séparées par du vide, permettant la propagation d'une onde électromagnétique dans une direction.

Pour simplifier, on considère ici seulement les deux plaques parallèles supérieure et inférieure, supposées infinies, dont les surfaces sont confondues avec les plans $y = 0$ et $y = a$.



Dans cette région vide se propage une onde caractérisée par son champ électrique, de la forme :
$\vec{E}(M,t) = A(y)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ avec $\omega > 0$ et $k > 0$.

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans le métal supposé parfaitement conducteur, et que de part et d'autre d'une surface, il y a continuité de la composante normale du champ $\vec{B}$ et de la composante tangentielle du champ $\vec{E}$.

a) Déduire de l'une des équations de Maxwell la forme du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$. L'onde est-elle transverse ?

b) À quelle équation d'onde obéissent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide ? En déduire l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)A(y) = 0 .$$

c) Déterminer les conditions aux limites pour $A(y)$. En déduire complètement la fonction en montrant que ω est nécessairement supérieure à kc.

d) Montrer que la relation de dispersion est de type Klein–Gordon : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \text{cte}$ et donner l'expression des valeurs discrètes k_n que peut prendre k pour ω donnée. (À chaque valeur de n est associé un *mode propre* du guide d'onde.)

e) Déterminer la valeur minimale de fréquence au-dessous de laquelle l'onde ne peut pas se propager. Calculer cette fréquence pour un guide d'onde de largeur a = 2 cm : dans quel domaine des ondes électromagnétiques se situe-t-elle ?

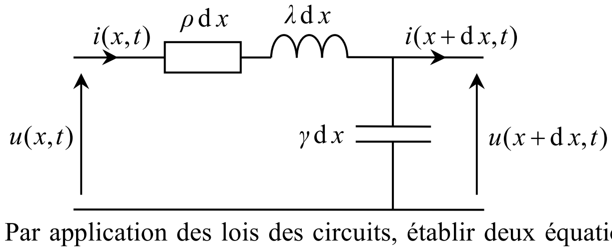
f) Pour un mode propre donné, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Représenter ces deux vitesses en fonction de ω.

g) Calculer le vecteur de Poynting puis sa valeur moyenne temporelle, et commenter cette dernière.

Dispersion et absorption d'autres ondes

3. Atténuation dans un câble coaxial

Dans la transmission d'un signal par câble coaxial, l'atténuation du signal est notable même sur des distances de quelques dizaines de mètres. Pour l'interpréter, on modélise le câble avec trois constantes réparties : inductance par unité de longueur $\lambda = 0{,}28\ \mathrm{\mu H \cdot m^{-1}}$, capacité par unité de longueur $\gamma = 55\ \mathrm{pF \cdot m^{-1}}$, résistance par unité de longueur $\rho = 0{,}65\ \mathrm{m\Omega \cdot m^{-1}}$.



a) Par application des lois des circuits, établir deux équations aux dérivées partielles couplées, d'ordre 1, vérifiées par la tension $u(x,t)$ et l'intensité $i(x,t)$.

b) En déduire l'équation de propagation de l'onde de tension.

c) On cherche une solution sous forme d'OPPH en notation complexe : $\underline{u}(x,t) = \underline{A}\exp j(\omega t - \underline{k}x)$ avec $\underline{k}$ complexe. Déterminer la relation de dispersion, et en déduire les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$, et finalement l'expression réelle de l'onde. Y a-t-il dispersion ? absorption ?

d) Calculer la célérité c de cette onde. Quel est l'indice de réfraction du polyéthylène qui constitue l'isolant de ce câble ?

e) Déterminer l'atténuation pour une longueur de 100 m, exprimée en dB/hm.

4. Influence de la dissipation sur une corde

On considère une corde d'axe (Ox), mobile dans le plan (Oxy) (tension T, masse linéique μ). On tient compte de l'interaction avec l'air environnant, qui correspond à des frottements mais aussi à la transmission du son dans l'air, de sorte que l'élément $\mathrm{d}x$ de corde subit une force $\mathrm{d}\vec{F} = -h\vec{v}(x,t)\,\mathrm{d}x$ où $\vec{v}(x,t)$ est la vitesse de $\mathrm{d}x$ et h une constante positive.

a) Établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par l'élongation $y(x,t)$.

b) On cherche des solutions en OPPH à cette équation (en notation complexe) : $\underline{y}(x,t) = \underline{A}\exp j(\omega t - kx)$. Montrer que k est nécessairement complexe (on le mettra sous la forme $k = k' - jk''$), et exprimer k' et k'' en fonction de μ, h, T et ω lorsque le mouvement est peu amorti ($h \ll \mu\omega$), en faisant un développement limité à l'ordre 1.

c) Donner la forme de l'onde, en complexes puis en réels. Y a-t-il dispersion ? absorption ?

☞ *Réponses partielles*

1. b) $\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{n^* e^2}{\varepsilon_0 m}} = 1{,}6\cdot 10^{16}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

2. c) $A(y) = E_\mathrm{m}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$.

4. b) $k' = \omega\sqrt{\dfrac{\mu}{T}}$, $k'' = \dfrac{h}{2\sqrt{\mu T}}$.