

### On3 – Corrigé des exercices 1, 2, 3 et 4

#### □ Exercice 1

a) Formule établie dans le cours :  $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$  avec  $\gamma_0 = \frac{n^* \tau e^2}{m}$ . AN  $\gamma_0 = 6,5 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  (valeur habituelle).

b) Formule établie dans le cours :  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0 \gamma_0 \omega = \frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{\mu_0 n^* \tau e^2 \omega}{m(1 + j\omega\tau)}$  que l'on peut écrire  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - j \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + j\omega\tau)} \right)$  en posant

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{\epsilon_0 m}}. \text{ AN } \omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \text{ Sachant que } \frac{1}{\tau} = 3,7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}, \text{ on trouve donc } \frac{1}{\tau} \ll \omega_p.$$

c) Ondes hertziennes :  $f < 100 \text{ GHz}$  environ, soit  $\omega < 6 \cdot 10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ces valeurs permettent bien d'écrire :  $\omega \ll 1/\tau \ll \omega_p$ .

Dans la relation de dispersion, on peut alors négliger le terme  $j\omega\tau$  devant 1, puis  $\frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} = \frac{\omega_p}{\omega} \omega_p \tau \gg 1$ . Il reste donc  $\underline{k}^2 = -j \frac{\omega \omega_p^2 \tau}{c^2}$ .

Les racines carrées de  $-j$  étant  $\pm \frac{1-j}{\sqrt{2}}$  (vu dans le cours, partie 2.c), on obtient  $\underline{k} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{\omega_p \sqrt{\omega \tau}}{c}$  soit  $\underline{k} = \frac{1-j}{\delta}$  en posant

$$\delta = \frac{c\sqrt{2}}{\omega_p \sqrt{\omega \tau}}, \text{ ce qui est bien égal à la formule } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}} \text{ vu dans le cours. La forme de l'onde est alors :}$$

$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - z/\delta)) \exp(-z/\delta) \underline{e}_x$  en complexes, d'où  $\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - z/\delta + \varphi) \exp(-z/\delta) \underline{e}_x$  en réels. C'est une onde plane progressive qui s'amortit le long de sa direction de propagation (effet de peau).

d) Ondes lumineuses :  $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < f < 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ , soit  $3 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < \omega < 5 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ces valeurs permettent bien d'écrire :

$$\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p. \text{ Cette fois c'est le terme } j\omega\tau \text{ qui est prépondérant devant 1, donc } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \text{ qui est un réel négatif : } \underline{k} \text{ est}$$

donc un imaginaire pur  $-j/\delta'$ . La forme de l'onde est alors :  $\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{E}_0 \exp(j\omega t) \exp(-z/\delta') \underline{e}_x$  en complexes, d'où

$\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \exp(-z/\delta') \underline{e}_x$  en réels. C'est une onde stationnaire qui s'amortit le long de sa direction de propagation, appelée onde évanescente.

e) Ultraviolets :  $8 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < f < 3 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$ , soit  $5 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < \omega < 2 \cdot 10^{17} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour les ultraviolets proches, on a toujours  $1/\tau \ll \omega < \omega_p$  donc le comportement est celui de la lumière visible. Mais pour les ultraviolets lointains,  $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ . Alors

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \text{ est un réel positif, donc } k \text{ est un réel : } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \text{ La forme de l'onde est } \underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \underline{e}_x :$$

elle n'est pas amortie, il n'y a pas d'absorption. La vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$  dépend de  $\omega$  : il y a dispersion.

f) Pour les rayons X et les rayons  $\gamma$  :  $f > 3 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$ , soit  $\omega > 2 \cdot 10^{17} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour une grande partie des rayons X et pour tous les rayons  $\gamma$  on peut donc écrire  $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ . La relation de dispersion se simplifie alors en  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , soit  $k = \frac{\omega}{c}$  comme dans le vide : il n'y a donc ni absorption, ni dispersion.

#### □ Exercice 2

a) Équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot } \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \underline{e}_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \underline{e}_y = -\frac{dA}{dy} \cos(\omega t - kx) \underline{e}_x + kA(y) \sin(\omega t - kx) \underline{e}_y$  d'où en

$$\text{intégrant par rapport au temps : } \underline{\vec{B}}(M, t) = -\frac{1}{\omega} \frac{dA}{dy} \sin(\omega t - kx) \underline{e}_x - \frac{k}{\omega} A(y) \cos(\omega t - kx) \underline{e}_y \text{ (sans constante, qui correspondrait à un}$$

champ stationnaire et non à une onde). L'onde n'est pas transverse, puisque le champ  $\underline{\vec{B}}$  a une composante parallèle à la direction de propagation ( $\underline{e}_x$ ). (On peut la qualifier de *transverse électrique*, car le champ  $\underline{\vec{E}}$ , lui, est transverse.)

b) Dans le vide, les deux champs obéissent à l'équation de D'Alembert. Elle devient ici :  $\left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \right) \underline{e}_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \underline{e}_z = \underline{0}$  d'où en

$$\text{projection sur } \underline{e}_z : -k^2 A(y) \cos(\omega t - kx) + \frac{d^2 A}{dy^2} \cos(\omega t - kx) + \frac{\omega^2}{c^2} A(y) \cos(\omega t - kx) = 0 \text{ soit } \frac{d^2 A}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) A(y) = 0.$$

c) Le champ  $\underline{\vec{E}}$  a uniquement une composante tangente aux interfaces vide/métal, il est donc continu :  $E_z(0^+) = E_z(0^-) = 0$  donc  $A(0) = 0$  et de même  $E_z(a^-) = E_z(a^+) = 0$  donc  $A(a) = 0$ . Le champ  $\underline{\vec{B}}$  a une composante tangentielle (selon  $\underline{e}_x$ ), qui peut être discontinue ; et une composante normale aux interfaces (selon  $\underline{e}_y$ ), dont la continuité redonne les deux mêmes équations.

Si  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$ , la solution est de la forme  $A(y) = \lambda \exp(k'y) + \mu \exp(-k'y)$  avec  $k' = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ . Mais les deux conditions aux limites conduisent alors à  $\lambda = \mu = 0$ , donc il n'y a pas de signal de cette forme.

Donc nécessairement  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ , soit  $\boxed{\omega > kc}$ , et la solution est de la forme  $A(y) = \alpha \cos(ky) + \beta \sin(ky)$  avec  $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$ . Les

conditions aux limites donnent alors  $A(0) = \alpha = 0$ , puis  $A(a) = \beta \sin(ka) = 0$  d'où  $ka = n\pi$ . Donc  $\boxed{A(y) = \beta \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}$ . Puisque  $\beta$  représente alors la valeur maximale du champ électrique, on peut le noter plutôt  $E_m$ .

d) On a trouvé  $\boxed{\vec{E}(M,t) = E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z}$  et  $\boxed{\vec{B}(M,t) = -\frac{n\pi}{a\omega} E_m \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{e}_x - \frac{k}{\omega} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y}$

en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, l'équation d'onde et les conditions aux limites. Ces champs doivent vérifier aussi les trois autres équations de Maxwell. Les deux équations de divergences sont toujours vérifiées :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$  et

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = +k \frac{n\pi}{a\omega} E_m \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) - \frac{n\pi k}{a\omega} E_m \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) = 0.$$

Enfin l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \vec{e}_z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \vec{e}_z$  d'où en projection sur  $\vec{e}_z$  :

$$-\frac{k^2}{\omega} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) - \frac{n^2 \pi^2}{a^2 \omega} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) = -\frac{\omega}{c^2} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx).$$

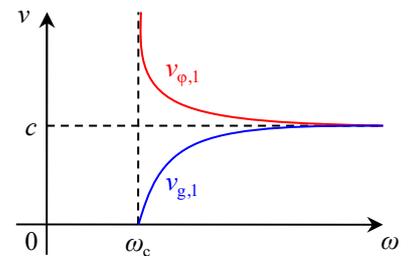
Après multiplication par  $\omega$  et simplification par  $E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)$  on obtient finalement :  $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$ . Donc  $\boxed{k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}}$ .

e) Pour qu'il y ait propagation il faut que  $k$  soit réel, donc au minimum  $\frac{\omega^2}{c^2} > \frac{\pi^2}{a^2}$  soit  $\omega > \frac{\pi c}{a} = \omega_c$  et en fréquence :  $\boxed{f > \frac{c}{2a} = f_c}$ .

AN  $\boxed{f_c = 15 \text{ GHz}}$  : c'est le domaine des ondes hertziennes, et plus précisément des micro-ondes.

f) Vitesse de phase :  $v_{\phi,n} = \frac{\omega}{k_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}}$  soit  $\boxed{v_{\phi,n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}}$ .

Vitesse de groupe :  $v_{g,n} = \frac{d\omega}{dk_n} = \left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{2\omega}{c^2}}{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}}\right)^{-1}$  soit  $\boxed{v_{g,n} = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}}$ .



On trouve bien  $\boxed{v_{g,n} v_{\phi,n} = c^2}$  (relation liée à l'équation de Klein-Gordon), avec  $\boxed{v_{g,n} < c}$  (vitesse de l'énergie) et  $v_{\phi,n} > c$ .

g)  $\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \wedge \left[-\frac{n\pi}{a\omega} E_m \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{e}_x - \frac{k}{\omega} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y\right]$

$$\text{soit } \boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0} E_m^2 \left[-\frac{n\pi}{a\omega} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \frac{k}{\omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x\right]}.$$

Moyenne temporelle :  $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle(M) = \frac{E_m^2 k}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \vec{e}_x}$ . Ce vecteur est bien selon la direction de propagation de l'onde. Il est maximum au milieu du guide d'onde, puisque c'est là que l'amplitude de l'onde (transverse) est maximale.

### ▣ Exercice 3

a) Loi des mailles :  $u(x+dx,t) + \lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + \rho dx i(x,t) - u(x,t) = 0$  d'où  $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial i}{\partial t} + \rho i = 0}$  (1).

Loi des nœuds :  $i(x,t) - i(x+dx,t) - \gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = 0$  d'où  $\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$  (2). (À l'ordre 1,  $\gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} \approx \gamma dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ .)

b) On dérive (1) par rapport à  $x$  et (2) par rapport à  $t$  :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + \rho \frac{\partial i}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ . Or  $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$  donc la première équation devient  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial i}{\partial x} = 0$ . Il reste à éliminer  $\frac{\partial i}{\partial x}$ , en utilisant à nouveau l'équation (2) :  $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$ .

Les deux premiers termes sont ceux de l'équation de D'Alembert, avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}}$ .

c) On injecte la forme proposée dans l'équation d'onde :  $-k^2 \underline{A} \exp j(\omega t - kx) + \lambda \gamma \omega^2 \underline{A} \exp j(\omega t - kx) - \rho \gamma j \omega \underline{A} \exp j(\omega t - kx) = 0$  d'où  $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \rho \gamma j \omega}$ . Il reste à trouver les racines carrées de ce nombre complexe, ce qui mène à des calculs assez lourds en l'absence d'approximation. Pour savoir si une approximation est faisable, comparons les ordres de grandeur des deux termes pour une fréquence typique de signal, par exemple quelques mégahertz, soit  $\omega \approx 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  :

$\frac{\omega^2}{c^2} \approx 10^{-3} \text{ m}^{-1}$  et  $\rho\gamma\omega \approx 10^{-7} \text{ m}^{-1}$  donc  $\rho\gamma\omega \ll \frac{\omega^2}{c^2}$  (et cela reste valable pour des fréquences 10 ou 100 fois plus faibles).

On peut alors faire un développement limité à l'ordre 1 :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \rho\gamma j\omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{\rho\gamma c^2}{\omega}\right) \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{\rho\gamma c^2}{2\omega}\right)^2$  d'où

$k \approx \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - j \frac{\rho\gamma c^2}{2\omega}\right) = \pm(k' - jk'')$  avec  $k' = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\lambda\gamma}$  et  $k'' = \frac{\rho\gamma c}{2} = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$ . Pour la suite on garde le signe + (sens des  $x$  croissants).

Finalement :  $u(x,t) = \underline{A} \exp j(\omega t - (k' - jk'')x) = \underline{A} \exp(-k''x) \exp j(\omega t - k'x)$  et en revenant aux notations réelles (avec  $\underline{A} = A_m \exp(j\varphi)$ ) :  $u(x,t) = A_m \exp(-k''x) \cos(\omega t - k'x + \varphi)$ .

La vitesse de phase (ou célérité) est  $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c$  : elle est indépendante de  $\omega$ , il n'y a pas de dispersion.

L'amplitude décroît exponentiellement le long de la direction de propagation : il y a absorption (due à l'effet Joule dans la résistance).

d) AN  $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Son indice est défini par :  $n = \frac{c_{\text{vide}}}{c}$ . AN  $n = 1,2$ .

e) Sur une longueur  $L = 100 \text{ m} = 1 \text{ hm}$ , l'onde est multipliée par  $\exp(-k''L)$ , c'est-à-dire atténuée d'un facteur  $\alpha = \exp(k''L)$ .

L'atténuation en dB/hm est donc :  $K = 20 \log \alpha = 20 \frac{\ln \alpha}{\ln 10} = 20 \frac{k''L}{\ln 10}$  soit  $K = \frac{10L\rho}{\ln 10} \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$ . AN  $K = 0,0040 \text{ dB/hm}$ .

#### Exercice 4

a) Avec les hypothèses et approximations habituelles, le PFD pour un tronçon  $dx$  de corde donne, en projection sur  $\vec{e}_y$  :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right) - h \frac{\partial y}{\partial t} dx \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{h}{\mu} \frac{\partial y}{\partial t}$$

b) On injecte dans l'équation et on simplifie :  $-\omega^2 = -\frac{T}{\mu} k^2 - \frac{h}{\mu} j\omega$  d'où  $k^2 = \frac{\mu}{T} \omega^2 - \frac{h}{T} j\omega = \frac{\mu}{T} \omega^2 \left(1 - \frac{jh}{\mu\omega}\right)$ .  $k^2$  est complexe (non

réel) donc  $k$  également. Pour  $h \ll \mu\omega$  :  $k = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T} \left(1 - \frac{jh}{2\mu\omega}\right)} = k' - jk''$  avec  $k' = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T}} \left(= \frac{\omega}{c} \text{ habituel} \right)$  et  $k'' = \frac{h}{2\sqrt{T\mu}}$ .

c) Alors  $y(x,t) = \underline{A} \exp j(\omega t - k'x + jk''x)$  soit  $y(x,t) = \underline{A} \exp(-k''x) \exp j(\omega t - k'x)$ , d'où  $y(x,t) = A \exp(-k''x) \cos(\omega t - k'x + \varphi)$ .

La vitesse de phase est  $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ , indépendante de la fréquence : il n'y a pas de dispersion.

Le facteur  $\exp(-k''x)$  traduit une atténuation de l'onde : il y a donc absorption de l'énergie de l'onde par le milieu au cours de la propagation (puisque la corde transfère son énergie à l'air environnant).