Exercices du chapitre On6

Milieu amplificateur de lumière

1. Émission spontanée contre émission stimulée

Le fonctionnement d'un laser suppose que l'émission stimulée soit largement prépondérante devant l'émission spontanée entre les deux niveaux utilisés.

a) Exprimer le rapport r entre la probabilité d'une émission spontanée et celle d'une émission stimulée en fonction des coefficients d'Einstein A et B et de la densité spectrale $u_f(f)$.

b) Dans le cas d'un corps noir à l'équilibre thermique, donner une autre expression de r en fonction du facteur de Boltzmann. Calculer l'ordre de grandeur de r dans le cas d'une onde lumineuse, pour un corps à température ordinaire. On donne $h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ J·s et $k_B = 1{,}38\cdot10^{-23}$ J·K^{-1}.

c) Le milieu actif d'un laser est maintenu hors équilibre (inversion de population), donc la formule de la question b n'est plus valable. Cependant la relation entre les coefficients A et B (démontrée par Einstein en utilisant le corps noir) est toujours valable. Exprimer r en fonction de h, $u_f(f)$, c et f.

d) Évaluer $u_f(f)$ pour un laser hélium-néon de fréquence $f = 4{,}736\cdot10^{14}$ Hz, de largeur spectrale $\Delta f = 19$ MHz, ayant une densité d'énergie $u_{\text{ém}} = 6{,}6\cdot10^{-4}$ J·m^{-3}.
En déduire alors la valeur de r dans ce laser.

2. Inversion de population par pompage optique

On modélise un laser comme un système à deux niveaux atomiques d'énergies E_1 et $E_2 > E_1$. On note n_1^* et n_2^* les populations (nombres d'atomes par unité de volume) des deux niveaux, et $\varphi(t)$ le flux surfacique de photons selon l'axe de la cavité. La probabilité d'absorption par atome et par unité de temps est égale à $\sigma\varphi$, où σ est un paramètre appelé section efficace ; la probabilité d'émission stimulée a la même valeur. [Autrement dit, on remplace le coefficient d'Einstein $B u_f(f)$, correspondant à une description ondulatoire, par $\sigma\varphi$ dans une description corpusculaire de la lumière.]
On supposera négligeable la probabilité d'émission spontanée.

a) Montrer que la variation de la population 1 due à l'absorption est $\delta n_{1,\text{abs}}^* = -\sigma\varphi n_1^*\,\mathrm{d}t$, et écrire de même celle de la population 2 due à l'émission stimulée.

b) On considère que tous les photons se déplacent à la vitesse c dans un cylindre de section S dans la même direction (axe de la cavité). Justifier la relation $\varphi = n_{\text{ph}}^* c$, où n_{ph}^* est la densité volumique de photons.

c) À partir d'un bilan de population de photons, établir l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sigma\varphi c\left(n_2^* - n_1^*\right)$.

d) À quelle condition a-t-on un milieu amplificateur ? Pourquoi est-il nécessaire de réaliser une inversion de population ?

Celle-ci peut être réalisée par un pompage optique, qui excite des atomes depuis le niveau fondamental vers les niveaux E_1 et E_2 par un apport d'énergie extérieur. On le modélise par un terme de source, tel que la variation de population 2 due au pompage est $\delta n_{2,\text{pomp}}^* = \lambda_2\,\mathrm{d}t$, et de même $\delta n_{1,\text{pomp}}^* = \lambda_1\,\mathrm{d}t$. On tient compte de processus (non radiatifs) de dépeuplement des deux niveaux par $\delta n_{1,\text{relax}}^* = -\gamma n_1^*\,\mathrm{d}t$ et $\delta n_{2,\text{relax}}^* = -\gamma n_2^*\,\mathrm{d}t$.
Enfin on pose $D = n_2^* - n_1^*$.

e) En l'absence d'absorption et d'émission stimulée, établir l'équation différentielle régissant $D(t)$. En déduire la constante de temps de l'évolution, et la valeur finale D_∞ de D.

f) On tient compte maintenant de l'absorption et de l'émission stimulée. Montrer que l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -\gamma(D - D_\infty) - 2\sigma\varphi D.$$

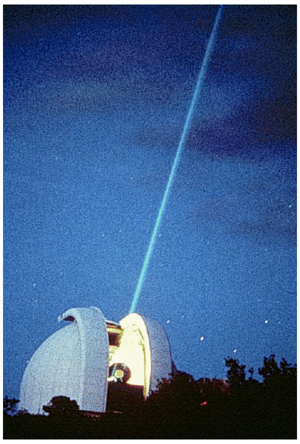
Quelle est alors la véritable valeur stationnaire D'_∞ ?

g) On tient compte finalement des pertes dans la cavité (absorption des photons sur les miroirs, sortie du faisceau laser), que l'on modélise par $\delta\varphi_{\text{pertes}} = -k\varphi\,\mathrm{d}t$. L'équation différentielle régissant φ s'écrit donc : $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -k\,\varphi + \sigma c D\,\varphi$.
Quelle est la condition sur D pour obtenir l'émission laser ?

Faisceau laser

3. Télémétrie laser-Lune

Pour mesurer très précisément la distance de la Terre à la Lune, on envoie un faisceau laser très puissant en direction de réflecteurs posés sur la Lune dans les années 1970, et on mesure la durée d'un aller-retour de ce faisceau.



Le signal laser utilisé à l'Observatoire de la Côte d'Azur est constitué de salves très brèves de 0,30 ns espacées de 0,10 s, la puissance pendant une salve étant de 1,0 GW. La longueur d'onde du laser utilisé (YAG-néodyme avec doubleur de fréquence) est $\lambda = 532$ nm. Le diamètre du faisceau à sa sortie du laser est $d = 1{,}2$ cm.
On prendra la valeur $c = 3{,}00\cdot10^8$ m·s^{-1} pour la célérité de la lumière.

a) La distance moyenne Terre–Lune étant de 384 000 km, quelle est la durée approximative entre l'émission d'une salve et la réception de l'onde réfléchie ?

b) Calculer le nombre de photons dans chaque salve.

Le faisceau a un profil gaussien d'axe (Oz), dont le facteur d'amplitude a pour expression en coordonnées cylindriques :

$$A(r,z) = A_0\,\frac{w_0}{w(z)}\exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \text{ avec } w(z) = w_0\sqrt{1+\frac{z^2}{\ell_R^2}}$$

$$\text{et } \ell_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \text{ (longueur de Rayleigh).}$$

c) Exprimer l'intensité (puissance surfacique) du faisceau, et montrer qu'à une abscisse z donnée, 86 % de la puissance est concentrée dans un disque de rayon $w(z)$. Ainsi on peut considérer $w(z)$ comme le rayon du faisceau à l'abscisse z.

d) Montrer que le faisceau est conique à grande distance, et préciser l'expression du demi-angle d'ouverture θ.

e) Calculer θ, en radians puis en secondes d'arc (de symbole ″ ou arcsec), pour le laser ci-dessus, en assimilant le *waist* w_0 au rayon de sortie du faisceau.

f) On réduit cet angle au moyen d'un télescope (jouant le rôle d'élargisseur de faisceau), mais les turbulences atmosphériques tendent à l'augmenter, de sorte que la valeur effectivement obtenue est $\theta = 2$ arcsec. En déduire le diamètre du faisceau à son arrivée sur la Lune.

g) Calculer la proportion de photons captés et réfléchis par le réflecteur lunaire, composé d'un réseau de « coins de cubes » équivalent à un miroir plan de diamètre $d_1 = 10$ cm.

h) Au retour, le faisceau a un demi-angle $\theta' = 6$ arcsec et il est capté par le télescope de diamètre $d_2 = 1,54$ m. Calculer la proportion moyenne de photons détectés au retour, puis la proportion globale sur l'aller-retour.

i) En réalité cette proportion globale est de l'ordre de $1 \cdot 10^{-20}$. Quels effets supplémentaires permettent d'expliquer la différence avec la valeur calculée précédemment ?

j) Déduire de ces valeurs numériques comment on procède en pratique pour calculer la distance Terre–Lune, et évaluer l'incertitude (relative puis absolue) sur cette mesure de distance.

☞ *Réponses partielles*

1. b) $r = \exp\left(\dfrac{hf}{k_B T}\right) - 1 \approx 10^{30}$ à 10^{48}.

d) $u_f(f) \approx \dfrac{u_{ém}}{\Delta f} = 3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}}$.

2. d) $\dfrac{dD}{dt} + \gamma D = \lambda_2 - \lambda_1$.

3. b) $N = 8,0 \cdot 10^{17}$. e) $\theta = 2,8 \cdot 10^{-5}$ rad $= 5,8$ arcsec.

g) Proportion de photons captés à l'aller : $p_1 = 2 \cdot 10^{-10}$.