On6 – Corrigé des exercices 1 et 2

¤ Exercice 1

a) D'après les définitions des coefficients d'Einstein : $\boxed{r = \dfrac{A}{Bu_f(f)}}$.

b) Or $u_f(f) = \dfrac{8\pi h f^3}{c^3}\dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{hf}{k_B T}\right)-1}$ et $A = B\dfrac{8\pi h f^3}{c^3}$ donc $\boxed{r = \exp\left(\dfrac{hf}{k_B T}\right)-1}$. Avec $T = 300$ K et $f = 6\cdot 10^{14}$ Hz : $\boxed{r \approx 10^{42}}$.

L'émission est donc presque toujours spontanée.

c) $A = B\dfrac{8\pi h f^3}{c^3}$ est toujours valable. On peut donc écrire, en injectant cette formule dans celle de la question a : $\boxed{r = \dfrac{8\pi h f^3}{c^3 u_f(f)}}$.

d) Rappel : $u_{\text{ém}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_f(f)\,\mathrm{d}f$. En assimilant la distribution spectrale à une fonction porte (profil rectangulaire), on obtient simplement : $u_{\text{ém}} = u_f(f)\times \Delta f$, d'où $\boxed{u_f(f) = \dfrac{u_{\text{ém}}}{\Delta f}}$. AN $\boxed{u_f(f) = 3\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J\cdot m^{-3}\cdot Hz^{-1}}}$. Alors $\boxed{r = 2\cdot 10^{-3} = \dfrac{1}{500}}$. Cette fois c'est bien l'émission stimulée qui prédomine largement, seul 1 photon sur 500 est perdu en émission spontanée.

¤ Exercice 2

a) La probabilité d'absorption par atome et par unité de temps est égale à $\sigma\varphi$, donc la probabilité pour *un* atome de subir une absorption pendant la durée $\mathrm{d}t$ est $\sigma\varphi\,\mathrm{d}t$. Sur une population de n_1^*, le nombre d'atomes subissant une absorption est donc $\sigma\varphi n_1^*\,\mathrm{d}t$. Et comme ce phénomène fait *diminuer* la population du niveau 1, on écrit la variation avec un signe – : $\boxed{\delta n_{1,\text{abs}}^* = -\sigma\varphi\, n_1^*\,\mathrm{d}t}$.

De même pour l'émission stimulée : $\boxed{\delta n_{2,\text{stim}}^* = -\sigma\varphi\, n_2^*\,\mathrm{d}t}$.

b) Comme pour tous les phénomènes de transport, on peut relier le flux surfacique φ de photons avec leur densité volumique n_{ph}^* et leur vitesse c. Pour cela, on utilise le « raisonnement du cylindre » : les photons traversant une surface S entre t et $t+\mathrm{d}t$, soit $\varphi S\,\mathrm{d}t$, sont ceux qui se trouvaient à t dans un cylindre de section S et de longueur $c\,\mathrm{d}t$, donc leur nombre est $n_{\text{ph}}^* S c\,\mathrm{d}t$. Par identification : $\varphi S\,\mathrm{d}t = n_{\text{ph}}^* S c\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\varphi = n_{\text{ph}}^* c}$ (1). Cette formule est analogue à $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

c) Faisons alors un bilan du nombre N de photons dans un cylindre de section S et de longueur L, entre t et $t+\mathrm{d}t$: $N(t+\mathrm{d}t) - N(t) = +\delta N_{\text{entrants}} - \delta N_{\text{sortants}} + \delta N_{\text{émis}} - \delta N_{\text{abs}} \Leftrightarrow \left[n_{\text{ph}}^*(t+\mathrm{d}t) - n_{\text{ph}}^*(t)\right]SL = +\varphi S\,\mathrm{d}t - \varphi S\,\mathrm{d}t + SL\left[\sigma\varphi n_2^*\,\mathrm{d}t - \sigma\varphi n_1^*\,\mathrm{d}t\right]$ d'où $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}n_{\text{ph}}^*}{\mathrm{d}t} = \sigma\varphi\left(n_2^* - n_1^*\right)}$. En utilisant la relation (1) on obtient alors : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sigma\varphi c\left(n_2^* - n_1^*\right)}$.

d) Le milieu est amplificateur si φ augmente, donc si $\boxed{n_2^* > n_1^*}$. Or à l'équilibre thermodynamique, régi par la statistique de Maxwell–Boltzmann, $n_2^* < n_1^*$: on doit donc réaliser une <u>inversion de population</u> par rapport à la situation à l'équilibre.

e) Bilan de population au niveau 1 : $n_1^*(t+\mathrm{d}t) - n_1^*(t) = \delta n_{1,\text{pomp}}^* + \delta n_{1,\text{relax}}^* = +\lambda_1\,\mathrm{d}t - \gamma n_1^*\,\mathrm{d}t$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}n_1^*}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 - \gamma n_1^*$. De même pour le niveau 2 : $\dfrac{\mathrm{d}n_2^*}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 - \gamma n_2^*$. On soustrait membre à membre : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} + \gamma D = \lambda_2 - \lambda_1}$. La solution est de la forme $D(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + D_\infty$, avec la constante de temps $\boxed{\tau = \dfrac{1}{\gamma}}$ et la valeur asymptotique $\boxed{D_\infty = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\gamma}}$.

f) Dans le bilan du niveau 1 il faut ajouter le flux sortant dû à l'absorption (passage d'atomes du niveau 1 au niveau 2), *mais aussi* le flux entrant dû à l'émission stimulée (passage du niveau 2 au niveau 1) :

$n_1^*(t+\mathrm{d}t) - n_1^*(t) = \delta n_{1,\text{pomp}}^* + \delta n_{1,\text{relax}}^* + \delta n_{1,\text{abs}}^* - \delta n_{2,\text{stim}}^* = +\lambda_1\,\mathrm{d}t - \gamma n_1^*\,\mathrm{d}t - \sigma\varphi n_1^*\,\mathrm{d}t + \sigma\varphi n_2^*\,\mathrm{d}t$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}n_1^*}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 - \gamma n_1^* - \sigma\varphi n_1^* + \sigma\varphi n_2^*$. De même pour le niveau 2 : $\dfrac{\mathrm{d}n_2^*}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 - \gamma n_2^* - \sigma\varphi n_2^* + \sigma\varphi n_1^*$. Par soustraction : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -\gamma(D - D_\infty) - 2\sigma\varphi D}$.

En régime stationnaire : $-\gamma(D - D_\infty) - 2\sigma\varphi D = 0$ d'où $\boxed{D'_\infty = \dfrac{\gamma}{\gamma + 2\sigma\varphi}D_\infty}$.

g) L'inversion de population ($D > 0$) ne suffit pas, car il faut aussi compenser les pertes dans la cavité. Pour que l'effet laser démarre, il faut qu'il y ait une amplification du flux : $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} > 0$ d'où $\boxed{D > \dfrac{k}{\sigma c}}$.

Quand le flux augmente, le paramètre k caractérisant les pertes peut en fait augmenter aussi : l'équation différentielle est alors non linéaire. On aboutit finalement à un régime stationnaire, pour lequel $D'_\infty = \dfrac{k_\infty}{\sigma c}$.