

Exercices de révisions de mécanique – Corrigé des exercices 6 et 7

□ Exercice 6

a) Équation de Navier–Stokes, en négligeant la pesanteur : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$.

b) La plaque étant modélisée comme infinie selon (Ox) et (Oz) , le problème peut être considéré comme invariant par translation selon ces deux axes : le champ de vitesse est alors indépendant de x et de z , il ne reste donc que les variables y et t .

L'excitation (mouvement de la plaque) étant uniquement selon (Ox) , tout plan parallèle à (Oxy) est un plan de symétrie du problème : la vitesse est donc parallèle à ce plan, c'est-à-dire n'a pas de composante sur \vec{e}_z . Il reste donc $\vec{v}(M, t) = v_x(y, t) \vec{e}_x + v_y(y, t) \vec{e}_y$.

Enfin le fluide est incompressible, donc $\text{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire que v_y est uniforme de haut en bas : la seule valeur possible est $v_y = 0$ (sinon le fluide traverserait la plaque). Finalement, il reste : $\vec{v}(M, t) = v_x(y, t) \vec{e}_x$.

c) $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x(y, t) \vec{e}_x$ soit $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = 0$. L'équation de Navier–Stokes devient donc : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$.

D'après les invariances citées précédemment, la pression est également une fonction $P(y, t)$, donc $\text{grad} P = \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y$.

Les deux projections de l'équation donnent alors : sur \vec{e}_x , $\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$; sur \vec{e}_y , $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ donc la pression est uniforme.

d) On injecte la forme cherchée dans l'équation : $\rho f(y) j\omega \exp(j\omega t) = \eta f''(y) \exp(j\omega t)$ soit $f''(y) - j \frac{\omega \rho}{\eta} f(y) = 0$. Sachant que les racines carrées de j sont $\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, l'équation peut s'écrire $f''(y) - \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 f(y) = 0$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}}$. Solution générale :

$f(y) = A \exp\left(\frac{(1+j)y}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{(1+j)y}{\delta}\right) = A \exp\left(\frac{y}{\delta}\right) \exp\left(j \frac{y}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \exp\left(-j \frac{y}{\delta}\right)$ avec A et B complexes.

Première condition aux limites en $y \rightarrow +\infty$: v_x ne peut pas diverger, donc $A = 0$. Il reste $f(y) = B \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \exp\left(-j \frac{y}{\delta}\right)$, soit

$\vec{v}(y, t) = B \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \exp\left(-j \frac{y}{\delta}\right) \exp(j\omega t) \vec{e}_x = B \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)\right) \vec{e}_x = |B| \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{y}{\delta} + \varphi_B\right)\right) \vec{e}_x$ qui

devient en réels : $\vec{v}(y, t) = |B| \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta} + \varphi_B\right) \vec{e}_x$.

En $y = 0$: $v_x(0, t) = V_m \cos(\omega t) = |B| \cos(\omega t + \varphi_B)$ donc $|B| = V_m$ et $\varphi_B = 0$. Finalement : $\vec{v}(y, t) = V_m \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{e}_x$.

Il s'agit d'une onde plane progressive, amortie le long de sa direction de propagation. Cette onde est *transverse*, puisque les couches de fluide oscillent selon (Ox) , tandis que l'onde se propage selon (Oy) : une telle onde de vitesse est appelée *onde de cisaillement* (alors qu'une onde longitudinale, c'est-à-dire acoustique, est une *onde de compression*).

e) δ est la distance caractéristique d'amortissement. Pour l'eau à 5 Hz : $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho 2\pi f}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 5}}$ soit $\delta = 0,25 \text{ mm}$.

f) $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{2\pi f}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,01}{2 \cdot 3,14 \cdot 5}}$ soit $\delta = 25 \text{ mm}$. Cette valeur est minuscule par rapport aux distances à parcourir dans le noyau de la

Terre (quelques milliers de kilomètres) : une onde de cisaillement ne se propage pas dans la partie liquide du noyau terrestre.

En revanche elle peut se propager dans la partie solide du noyau et dans le manteau, solide également ; et les ondes de compression se propagent dans les deux milieux. La connaissance de ces phénomènes, et l'analyse des différents types d'ondes reçues par des détecteurs d'ondes sismiques en différents points de la Terre, permettent de déterminer la structure du noyau terrestre.

□ Exercice 7

a) Le sèche-cheveux fonctionnant en régime stationnaire, il y a conservation du débit massique : $\rho_e v_e S_e = \rho_s v_s S_s$.

On définit un système fermé à partir de la surface de contrôle Σ délimitée par le sèche-cheveux : à l'instant t , le système comporte la masse d'air dans Σ et la masse $D_m dt = \rho_e v_e S_e dt$ qui va entrer entre t et $t + dt$; à l'instant $t + dt$, il comporte la masse de fluide dans Σ

et la même masse $\rho_e v_e S_e dt$ qui est sortie entre t et $t + dt$. Bilan d'énergie cinétique : $\frac{E_c(t+dt) - E_c(t)}{dt} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_{\text{pression}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$.

La puissance des forces intérieures est nulle si on suppose un écoulement parfait. La puissance des forces de pression existe sur les deux sections où la vitesse de l'air est colinéaire aux forces de pression : $\mathcal{P}_{\text{pression}} = +P_e S_e v_e - P_s S_s v_s$. Or $P_e = P_s$ car il s'agit de la pression atmosphérique dans les deux cas. Enfin, en l'absence de chauffage, et pour des vitesses faibles devant la célérité du son, on peut considérer $\rho_e = \rho_s$, d'où $v_e S_e = v_s S_s$. Finalement, $\mathcal{P}_{\text{pression}} = 0$.

Enfin $E_c(t) = E_{c,\Sigma} + \frac{1}{2}(\rho_e v_s S_s dt) v_e^2$ et $E_c(t+dt) = E_{c,\Sigma} + \frac{1}{2}(\rho_e v_s S_s dt) v_s^2$. Le bilan donne donc : $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho_e v_s S_s (v_s^2 - v_e^2)$.

Il reste à exprimer la vitesse d'entrée v_e : $v_e S_e = v_s S_s$ d'où $v_e = v_s \frac{S_s}{S_e}$. Finalement : $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho_e v_s^3 S_s \left(1 - \frac{S_s^2}{S_e^2} \right)$. AN $\mathcal{P} = 1,8 \text{ W}$.

Cette puissance semble assez faible pour un tel appareil usuel. En effet, l'essentiel de la puissance d'un sèche-cheveux commercial est en fait utilisé pour le chauffage, comme on va le voir.

b) Si la température de l'air augmente, sa masse volumique diminue. D'après l'équation du gaz parfait (modèle convenable à pression atmosphérique) : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{MP}{RT}$ d'où $\frac{\rho_s}{\rho_e} = \frac{T_e}{T_s}$. La conservation du débit massique donne alors $v_e = v_s \frac{\rho_s S_s}{\rho_e S_e} = v_s \frac{T_s S_s}{T_e S_e}$.

Par ailleurs, dans le bilan énergétique on doit tenir compte maintenant de la variation d'enthalpie, c'est-à-dire utiliser le premier principe industriel : $\rho_s v_s S_s (h_s - h_e) + \frac{1}{2} \rho_s v_s S_s (v_s^2 - v_e^2) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_{méc} = \mathcal{P}_{tot}$.

Pour un gaz parfait diatomique, $h_s - h_e = c_p (T_s - T_e) = \frac{7}{2} \frac{R}{M} (T_s - T_e)$. Donc $\mathcal{P}_{tot} = \frac{\rho_e v_s S_s T_e}{2 T_s} \left[\frac{7R}{M} (T_s - T_e) + v_s^2 \left(1 - \frac{T_e^2 S_s^2}{T_s^2 S_e^2} \right) \right]$.

AN $\mathcal{P}_{tot} = 660 \text{ W}$. Cette fois l'ordre de grandeur correspond bien aux valeurs usuelles.