

Devoir surveillé N° 1

Éléments de correction.

Problème 1. Étude des dérivées successives de Argth .

Partie A : Définition et étude de Argth

1. La fonction th est dérivable par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0$.

On a par ailleurs lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \sim \frac{e^x}{e^x} \rightarrow 1$.

De même $\operatorname{th}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$.

On en déduit que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $] -1; 1[$.

La fonction th est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

th réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son intervalle image $J =] -1, 1[$.

2. La fonction th est dérivable et th' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que Argth est dérivable sur $] -1, 1[$ et $\operatorname{Argth}' = \frac{1}{\operatorname{th}' \circ \operatorname{Argth}}$.

Or on a $\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$ donc

$$\forall x \in] -1, 1[, \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{Argth}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

On a le DL usuel en 0 : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$ donc $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$.

Par intégration de DL, $\operatorname{Argth}(x) = \operatorname{Argth}(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Comme $\operatorname{th}(0) = 0$ on a $\operatorname{Argth}(0) = 0$ donc $\operatorname{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

3. D'après le DL précédent, $\mathcal{C}_f$ admet la droite $D : y = x$ pour tangente en l'origine.

De plus, le terme $\frac{x^3}{3}$ changeant de signe en 0,

la tangente traverse la courbe en étant dessous puis dessus.

Tracer ensuite la courbe avec la tangente et les asymptotes verticales en $x = \pm 1$.

$\hookrightarrow$ pour vous !

Partie B : Une famille de polynômes

1. La fonction f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; 1[$ par opérations donc f aussi.

On obtient ensuite, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \text{ et } f^{(3)}(x) = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$$

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in] -1, 1[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n}$$

Initialisation. D'après la partie précédente $\mathcal{P}(1)$ est vraie en posant $P_1 = 1$.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $x \in] -1, 1[$.
On calcule

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n} \right) \\ &= \frac{P'_n(x)(1-x^2)^n - P_n(x)n(-2x)(1-x^2)^{n-1}}{(1-x^2)^{2n}} \\ &= \frac{P'_n(x)(1-x^2) - P_n(x)n(-2x)}{(1-x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{P'_n(x)(1-x^2) + 2nxP_n(x)}{(1-x^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

On a la formule au rang $n+1$ en posant $P_{n+1} = (1-X^2)P'_n + 2nXP_n$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, la suite de polynômes existe bien et vérifie la relation de récurrence annoncée.

Partie C : Recherche des racines complexes de P_n

1. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n) : P_n(X) = \frac{(n-1)!}{2} ((X+1)^n - (X-1)^n)$

Initialisation.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} &\text{On a } P_{n+1} = (1-X^2)P'_n + 2nXP_n \\ &= (1-X^2) \frac{(n-1)!}{2} ((X+1)^n - (X-1)^n)' + 2nX \frac{(n-1)!}{2} ((X+1)^n - (X-1)^n) \\ &= \frac{(n-1)!}{2} \left[(1-X^2) \left(n(X+1)^{n-1} - n(X-1)^{n-1} \right) + 2nX \left((X+1)^n - (X-1)^n \right) \right] \\ &= \frac{n!}{2} \left[(1-X)(1+X) \left((X+1)^{n-1} - (X-1)^{n-1} \right) + 2X \left((X+1)^n - (X-1)^n \right) \right] \\ &= \frac{n!}{2} [(X+1)^n(1-X+2X) + (X-1)^n(1+X-2X)] \\ &= \frac{n!}{2} [(X+1)^{n+1} - (X-1)^{n+1}] \end{aligned}$$

La formule est bien valable au rang $n+1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence $\forall n \geq 1, P_n = \frac{(n-1)!}{2} \left((X+1)^n - (X-1)^n \right)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'expression obtenue à la question précédente on peut écrire

$$\alpha \text{ racine de } P \iff (\alpha-1)^n = (\alpha+1)^n \iff \frac{(\alpha-1)^n}{(\alpha+1)^n} = 1 \iff \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)^n = 1.$$

(-1 n'est pas racine de P_n donc on peut diviser par $\alpha+1$)

On a bien $\alpha \text{ racine de } P \iff \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \text{ est une racine } n\text{-ème de l'unité.}$

Ainsi $\alpha \text{ racine de } P \iff \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \text{ est une racine } n\text{-ème de l'unité.}$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \alpha-1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} (\alpha+1)$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \alpha(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1$$

La valeur $k=0$ est exclue car l'équation devrait alors $0 = -2 \dots$ Ainsi

$$\alpha \text{ racine de } P \iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, \alpha = -\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}.$$

Les racines de P_n sont les nombres $x_k = -\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

3. On simplifie les valeurs trouvées précédemment. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On calcule par la technique d'argument moitié :

$$x_k = -\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} \cdot 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \cdot 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = i \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Comme le coefficient dominant de P_n est $n!$ on conclut la factorisation

$$P_n(X) = n! \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

4. Par les relations coefficients-racines $\prod_{k=1}^{n-1} x_k = \frac{(-1)^{n-1} a_0}{n!}$ en notant a_0 le coefficient constant de P_n .

D'après la forme obtenue au (2.a), ce coefficient constant vaut $a_0 = \frac{(n-1)!}{2} (1 - (-1)^n)$.

$$\text{Ainsi } \prod_{k=1}^{n-1} x_k = (-1)^{n-1} \frac{1 - (-1)^n}{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

Partie D : Somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

Pour cela, on étudie plus particulièrement les polynômes P_{2n+1}

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(x_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ les racines de P_{2n+1} .

On calcule pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$,

$$x_{2n+1-k} = \operatorname{icotan} \left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} \right) = \operatorname{icotan} \left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1} \right) = \operatorname{icotan} \left(-\frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

d'où $x_{2n+1-k} = -x_k$.

La question précédente donne plus précisément : $x_{2n} = -x_1$, $x_{2n-1} = -x_2, \dots$, $x_{n+1} = -x_n$.

Ce qui permet d'écrire $P_{2n+1} = (2n+1)! \prod_{k=1}^{2n} (X - x_k) = (2n+1)! \prod_{k=1}^n [(X - x_k)(X + x_k)]$.

Ainsi $P_{2n+1} = (2n+1)! \prod_{k=1}^n (X^2 - x_k^2)$.

On peut donc poser $R_n = (2n+1)! \prod_{k=1}^n (X - x_k^2)$ qui convient.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(X) &= \frac{(2n)!}{2} \left((X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1} \right) \\ &= \frac{(2n)!}{2} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k (-1)^{2n+1-k} \right] \end{aligned}$$

Les termes d'indice k impair se simplifient et il reste

$$P_{2n+1}(X) = (2n)! \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k$$

Un changement d'indice $k = 2p$ donne alors

$$P_{2n+1}(X) = (2n)! \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p} X^{2p}$$

dont on déduit la forme

$$R_n = (2n)! \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p} X^p$$

- (b) La somme voulue est en fait l'opposé de la somme des racines du polynôme scindé R_n . Par les relations coefficients-racines

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{(2n)! \cdot \binom{2n+1}{2(n-1)}}{(2n+1)!} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{(2n+1)}$$

$$= \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3! \cdot (2n+1)}$$

$$= \boxed{\frac{n(2n-1)}{3}}$$

3. (a) Il suffit d'étudier les variations des fonctions $t \mapsto t - \sin(t)$ et $t \mapsto \tan(t) - t$.
 $\hookrightarrow$ pour vous !

On conclut $\boxed{\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[, 0 < \sin(t) \leq t \leq \tan(t) .}$

- (b) Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a $\sin^2(t) \leq t^2 \leq \tan^2(t)$ donc $\frac{1}{\tan^2(t)} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\sin^2(t)}$.

Or $\frac{1}{\sin^2(t)} = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\sin^2(t)} = 1 + \cotan^2(t)$ donc

$$\cotan^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \cotan^2(t)$$

- (c) Soit alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En appliquant cet encadrement à $t = \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on obtient

$$\boxed{\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leq 1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on déduit de l'encadrement précédent

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

En sommant pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on en déduit

$$(*) \quad \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

- (d) Or par la question (b) on a la relation

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{n(2n-1)}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4n^2} \cdot \frac{2n^2}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$$

On déduit de (*) par passage aux limites finies par encadrement que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$