Problème 1. Étude des dérivées successives .

Partie A : Définition et étude de

1. Établir le tableau de variations complet de la fonction $\tanh = \dfrac{\sinh}{\cosh}$.
En déduire que tanh est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

On appelle argtanh *sa fonction réciproque.*

2. Montrer que argtanh est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de argtanh.

3. Interpréter graphiquement le DL obtenu à la question précédente.
Tracer ensuite l'allure de la courbe de argtanh.

Partie B : Une famille de polynômes

Dans toute la suite du problème, on notera f l'application argtanh.

1. Justifier que f est infiniment dérivable.
Calculer $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.

2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,1[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n}$$

qui vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(\mathrm{X}) = (1-\mathrm{X}^2)P_n'(\mathrm{X}) + 2n\mathrm{X}P_n(\mathrm{X})$.

Partie C : Recherche des racines complexes de P_n

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$P_n(\mathrm{X}) = \frac{(n-1)!}{2}\Big((\mathrm{X}+1)^n - (\mathrm{X}-1)^n\Big)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que α racine de $P \iff \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$ est une racine n-ème de l'unité.
En déduire les racines complexes de P_n qu'on notera $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$.

3. Montrer que $P_n(\mathrm{X}) = n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \mathbf{i}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ où $\mathrm{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} x_k$.

Partie D : Somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$

Pour cela, on étudie plus particulièrement les polynômes $P_{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ les racines de P_{2n+1}.
Montrer que $\forall k \in \{1,\dots,n\}, x_{2n+1-k} = -x_k$.
A l'aide de la factorisation de P_{2n+1}, en déduire qu'il existe $R_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que
$P_{2n+1}(\mathrm{X}) = R_n(\mathrm{X}^2)$. *(on donnera R_n sous forme factorisée)*

2. **(a)** En utilisant $P_{2n+1}(\mathrm{X}) = \dfrac{(2n)!}{2}\left((\mathrm{X}+1)^{2n+1} - (\mathrm{X}-1)^{2n+1}\right)$, établir une expression développée de R_n.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

3. **(a)** Montrer que $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, 0 < \sin(t) \leqslant t \leqslant \tan(t)$.

(b) En déduire que $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, 0 < \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(t)$.

(c) En appliquant l'encadrement précédent à $\dfrac{k\pi}{2n+1}$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, établir un encadrement de la somme partielle S_n.

(d) En déduire que la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est $\dfrac{\pi^2}{6}$.