Lycée Honoré de Balzac Mai 2024
PCSI

**Programme des colles de la semaine du 13 mai 2024**

# Espaces vectoriels

1. Notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$ où $\Omega$ est un ensemble.
3. Combinaison linéaire.
4. Sous-espace vectoriel. Caractérisations.
5. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
6. Une intersection de sous-espace vectoriel est [1] un sous-espace vectoriel.
7. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs, on définit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ ; c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$. On décrit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
8. Cas particulier des matrices : on rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les combinaisons linéaires des colonnes de $A$ sont les colonnes de la forme $AX$, où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Im}(A)$ l'espace engendré par les colonnes.
9. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
10. Famille libre.
11. Une famille est liée ssi [1] l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
12. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ssi [1] pour tout $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
13. Cas des colonnes d'une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de $A$, on définit $\mathrm{Ker}(A)$ et on remarque que $(C_1, \dots, C_p)$ est libre ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{p,1}\}$.
14. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre [1].
15. Base d'un espace vectoriel : définition. Caractérisation : $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de $E$ ssi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
16. Composantes d'un vecteur dans une base.
17. Base canonique de $\mathbb{K}^n$ ; base canonique de $\mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{K})$ ; base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
18. Pour des sous-espaces vectoriels d'espaces du type $\mathbb{K}^n$ :
    (a) exercice-type : passer d'une description par équations à une description par base (et donc avec paramètres) ;
    (b) exercice-type : passer d'une description par famille génératrice (ou description paramétrique) à une description par équations ;
    (c) exercice-type : extraire une base d'une famille génératrice.
19. Somme de deux sous-espaces vectoriels
    (a) Définition
    (b) Famille génératrice de la somme comme concaténation de familles génératrices de chaque espace.
20. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels $E_1$ et $E_2$
    (a) Définition
    (b) Caractérisation [1] par l'unique décomposition du vecteur nul comme somme d'un vecteur de $E_1$ et d'un vecteur de $E_2$
    (c) Caractérisation [1] par $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

**Dimension finie**

21. Un espace est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

1. Résultat démontré en cours.

22. Théorème de la base incomplète et conséquences : de toute famille génératrice on peut extraire une base ; tout espace de dimension finie admet au moins une base ; si $E$ est de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de $E$ peut être complétée en une base.
23. Si $E$ est de dimension finie et admet une famille génératrice à $p$ éléments, alors toute famille libre de $E$ admet au plus $p$ éléments.
24. Si $E$ est de dimension finie, toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments [1]. On appelle dimension de $E$ ce nombre d'éléments.
25. Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
26. Retour sur les ensembles de solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 homogènes ; des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes. Ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, homogène.
27. Soit $E$ de dimension $n$.
    (a) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$ et on a : $p = n \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_p)$ est une base de $E$.
    (b) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice de $E$, alors $p \geqslant n$ et on a : $p = n \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_p)$ est une base de $E$.
28. Familles de $n+1$ polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$. Retour sur la formule de Taylor pour les polynômes.
29. Si $E$ est de dimension finie et si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, on a : $\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E$.
30. Définition : hyperplan d'un espace de dimension finie.
31. Définition : rang d'une famille de vecteurs. On remarque que le calcul du rang revient à extraire une base d'une famille génératrice.
32. Somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie
    (a) Si $\mathcal{F}_1$ est une famille libre de $E_1$, $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de $E_2$ et si $E_1$ et $E_2$ sont en somme directe, alors [1] la concaténation de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de vecteurs de $E_1 \oplus E_2$.
    (b) Base adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_2$.
    (c) Dimension d'une somme directe.
    (d) Formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels, dans le cas général [1].
    (e) En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire [1].
    (f) Caractérisations des couples d'espaces supplémentaires à l'aide de la dimension.