Lycée Honoré de Balzac Mai 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 27 mai 2024

Dénombrement. Applications linéaires

Dénombrement

1. Notion d'ensemble fini. Cardinal.
2. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini. Cas d'égalité.
3. Applications entre deux ensembles finis E et F
   (a) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ injective, alors[1] $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
   (b) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ surjective, alors[1] $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.
   (c) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ bijective, alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
   (d) Si l'on suppose $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors[1] on a les équivalences : f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow$ f bijective.
4. Cardinal d'une réunion disjointe.
5. Si A et B sont deux parties de E, $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$ et[1] $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
6. Formule du crible de Poincaré pour une réunion de deux parties finies[1].
7. Cardinal d'un produit cartésien[1].
8. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre.
9. Nombre de parties d'un ensemble fini.
10. Notion de p-liste d'éléments de E. Nombre de p-listes.
11. Nombre de p-listes d'éléments distincts de E. Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre.
12. Permutations d'un ensemble fini. On applique en premier lieu ce vocabulaire aux bijections de l'ensemble dans lui-même, puis, dans un deuxième temps, aux n-listes d'éléments distincts, où n est le cardinal de l'ensemble.
13. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
14. Notation $\mathcal{P}_p(E)$ pour l'ensemble des parties de E ayant p éléments.
    Définition : $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$ où $n = \mathrm{Card}(E)$.
15. On explique de façon combinatoire, à partir de cette définition, tous les résultats sur les coefficients binomiaux vus dans le chapitre de calculs algébriques : valeurs élémentaires, symétrie des coefficients binomiaux, relation $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, formule avec factorielles.

Applications linéaires

1. Définition. Caractérisations.
2. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire[1].
3. Une composée d'applications linéaires est linéaire[1].
4. Linéarité de la composition à droite (resp. à gauche). Composée d'isomorphismes.
5. Linéarité de la bijection réciproque d'un isomorphisme[1].
6. Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.
7. Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des sous-espaces vectoriels de leurs espaces respectifs[1].
8. Lien entre noyau et injectivité[1]. Lien entre image et surjectivité.
9. Équations linéaires du type « $f(x) = b$ ». Usage d'une solution particulière x_p (si elle existe, i.e. quand $b \in \mathrm{Im}(f)$) pour décrire l'ensemble des solutions comme $x_p + \mathrm{Ker}(f)$.
10. Cas des endomorphismes
    (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme. En particulier, pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, notation f^k ; notion de polynôme de l'endomorphisme f.

1. Résultat démontré en cours.

(b) Automorphismes de E. Notation $GL(E)$ et énoncé des propriétés relatives au groupe linéaire ($\mathrm{id}_E \in GL(E)$, passage à l'inverse, stabilité par composition).

(c) Homothéties.

(d) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, projection p sur E_1 parallèlement à E_2.
   - Définition. Propriétés [1] : $p \in \mathscr{L}(E)$, $p^2 = p$, $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$.
   - Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$, alors [1] $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ et f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

(e) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
   - Définition. Propriétés : $p = \dfrac{\mathrm{id}_E + s}{2}$, $s \in \mathcal{L}(E)$, $s^2 = \mathrm{id}_E$, $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
   - Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = \mathrm{id}_E$, alors [1] en posant $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, on a $E_1 \oplus E_2 = E$ et f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

11. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $b_1, \dots, b_n \in E$.
   (a) On suppose que $(b_1 \dots, b_n)$ est une famille génératrice de E. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) On suppose que f est injective et que la famille $(b_1, \dots, b_n)$ est libre. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est libre.
   (c) On suppose que $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de E. On a alors l'équivalence [1] : f est injective $\iff$ la famille $\big(f(b_1), \dots,$
   (d) Conséquence : si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de E, on a l'équivalence :

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{la famille } \big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big) \text{ est une base de } F.$$

12. (a) Un espace E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}$ ssi E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, et le choix d'un tel isomorphisme correspond au choix d'une base de E.
   (b) Deux espaces E et F de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

13. Applications linéaires de rang fini
   (a) Définition de $\mathrm{rg}(f)$.
   (b) Pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a [1] : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.
   (c) Pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, on a [1] : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
   (d) Avec les mêmes notations :
      - si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$;
      - si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

14. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(b_k) = \beta_k$.

15. On admet pour l'instant : $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

16. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors, pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a [1] :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

17. Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, notion d'inverse à droite et d'inverse à gauche. Si f est inversible à droite ou à gauche, alors f est inversible et son inverse à droite ou à gauche est sa bijection réciproque.

18. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et que $E = E_1 \oplus E_2$. Pour toutes $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.

19. Forme géométrique du théorème du rang [1] : $f \in \mathscr{L}(E, F)$ induit un isomorphisme entre tout supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

20. Théorème du rang : si E est de dimension finie, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

21. Formes linéaires et hyperplans
   (a) Définitions : formes linéaires, hyperplans.
   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
   (b) Soit f une forme linéaire non nulle sur E (i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$). Alors [1] $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.
   (c) Soit H un hyperplan de E. Il existe [1] une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E. On a l'équivalence

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) \iff \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ f = \lambda g\Big).$$

   (e) Si H est un hyperplan de E et si D est une droite vectorielle non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.
   (f) Allure générale d'une forme linéaire (écriture en fonction des coordonnées des vecteurs, dans une base fixée). Équation d'un hyperplan (en ayant fixé une base de E).