Lycée Honoré de Balzac — Juin 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 3 juin 2024

Applications linéaires. Probabilités

Applications linéaires

1. Définition. Caractérisations.
2. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire [1].
3. Une composée d'applications linéaires est linéaire [1].
4. Linéarité de la composition à droite (resp. à gauche). Composée d'isomorphismes.
5. Linéarité de la bijection réciproque d'un isomorphisme [1].
6. Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.
7. Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des sous-espaces vectoriels de leurs espaces respectifs [1].
8. Lien entre noyau et injectivité [1]. Lien entre image et surjectivité.
9. Équations linéaires du type « $f(x) = b$ ». Usage d'une solution particulière x_p (si elle existe, i.e. quand $b \in \mathrm{Im}(f)$) pour décrire l'ensemble des solutions comme $x_p + \mathrm{Ker}(f)$.
10. Cas des endomorphismes
    (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme. En particulier, pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, notation f^k ; notion de polynôme de l'endomorphisme f.
    (b) Automorphismes de E. Notation $GL(E)$ et énoncé des propriétés relatives au groupe linéaire ($\mathrm{id}_E \in GL(E)$, passage à l'inverse, stabilité par composition).
    (c) Homothéties.
    (d) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, projection p sur E_1 parallèlement à E_2.
    — Définition. Propriétés [1] : $p \in \mathscr{L}(E)$, $p^2 = p$, $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$.
    — Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$, alors [1] $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ et f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
    (e) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
    — Définition. Propriétés : $p = \dfrac{\mathrm{id}_E + s}{2}$, $s \in \mathcal{L}(E)$, $s^2 = \mathrm{id}_E$, $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
    — Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = \mathrm{id}_E$, alors [1] en posant $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, on a $E_1 \oplus E_2 = E$ et f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
11. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $b_1, \dots, b_n \in E$.
    (a) On suppose que $(b_1 \dots, b_n)$ est une famille génératrice de E. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
    (b) On suppose que f est injective et que la famille $(b_1, \dots, b_n)$ est libre. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$ est libre.
    (c) On suppose que $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de E. On a alors l'équivalence [1] : f est injective $\iff$ la famille $\big(f(b_1), \dots,$
    (d) Conséquence : si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de E, on a l'équivalence :

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{la famille } \big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big) \text{ est une base de } F.$$

12. (a) Un espace E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}$ ssi E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, et le choix d'un tel isomorphisme correspond au choix d'une base de E.
    (b) Deux espaces E et F de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.
13. Applications linéaires de rang fini
    (a) Définition de $\mathrm{rg}(f)$.
    (b) Pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a [1] : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.
    (c) Pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, on a [1] : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
    (d) Avec les mêmes notations :

1. Résultat démontré en cours.

— si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$;

— si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

14. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(b_k) = \beta_k$.
15. On admet pour l'instant : $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
16. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors, pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a[1] :
$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$
17. Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, notion d'inverse à droite et d'inverse à gauche. Si f est inversible à droite ou à gauche, alors f est inversible et son inverse à droite ou à gauche est sa bijection réciproque.
18. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et que $E = E_1 \oplus E_2$. Pour toutes $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.
19. Forme géométrique du théorème du rang[1] : $f \in \mathscr{L}(E, F)$ induit un isomorphisme entre tout supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
20. Théorème du rang : si E est de dimension finie, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
21. Formes linéaires et hyperplans
    (a) Définitions : formes linéaires, hyperplans.
    Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
    (b) Soit f une forme linéaire non nulle sur E (i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$). Alors[1] $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.
    (c) Soit H un hyperplan de E. Il existe[1] une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$.
    (d) Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E. On a l'équivalence
    $$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) \iff \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ f = \lambda g\Big).$$
    (e) Si H est un hyperplan de E et si D est une droite vectorielle non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.
    (f) Allure générale d'une forme linéaire (écriture en fonction des coordonnées des vecteurs, dans une base fixée). Équation d'un hyperplan (en ayant fixé une base de E).

Probabilités sur un univers fini

1. Univers Ω des résultats observables, fini. Événements (comme Ω est fini, toute partie est un événement). Opérations sur les événements.
2. Système complet d'événements.
3. Probabilité sur un univers fini. Donner une probabilité revient à donner une distribution de probabilités (i.e. une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs ou nuls dont la somme vaut 1).
4. Propriétés usuelles, notamment formule du crible pour deux événements.
5. Cas de l'équiprobabilité : probabilité uniforme sur Ω et conséquence : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.
6. Probabilité conditionnelle : définition, propriétés usuelles.
7. Formule des probabilités composées.
8. Formule des probabilités totales. Version « avec intersection » et version « avec probabilités conditionnelles ». Par convention, pour cette deuxième version, on s'autorise à écrire le produit $P(A)P_A(B)$ même si $P(A) = 0$, et dans ce cas ce produit vaut 0.
9. Formule de Bayes.
10. Indépendance de deux événements. Si A et B sont indépendants, alors[1] A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
11. Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements. Résultat similaire sur la possibilité de passer au complémentaire.
12. Variables aléatoires (comme Ω est fini et que toute partie de Ω est un événement, toute fonction $X : \Omega \longrightarrow E$ est une variable aléatoire). Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.
13. Loi de probabilité d'une variable aléatoire ; notation P_X pour la probabilité induite par $X : \Omega \longrightarrow E$ sur E. La probabilité P_X est caractérisée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$.
14. Dire que X et Y ont même loi, c'est trouver un ensemble commun E contenant les valeurs de X et celles de Y et dire que $P_X = P_Y$ sur E. On note alors $X \sim Y$.

15. Fonction d'une variable aléatoire. Expression de la loi de $f(X)$ à l'aide de la loi de X.
16. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
17. Lois usuelles
    (a) Loi uniforme sur un ensemble fini non vide E. Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
    (b) Loi de Bernoulli de paramètre p. On remarque que si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\mathbf{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$.
    (c) Loi binomiale de paramètres n et p. Notation $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.
18. Si S est une variable qui compte le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre de succès p, alors[1] $S \sim \mathscr{B}(n, p)$.
19. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire.
20. Couples de variables aléatoires
    (a) Loi conjoite. Lois marginales.
    (b) Méthode pour trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe, avec la formule des probabilités totales.
21. Généralisation : vecteur aléatoire, loi conjointe, lois marginales.
22. Indépendance de deux variables aléatoires finies. Indépendance mutuelle d'une suite finie de variables aléatoires finies. Caractérisation par les probabilités des événements élémentaires.
23. Reformulation du résultat sur les lois binomiales : une somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.
24. Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont. Lemme des coalitions.