Lycée Honoré de Balzac — Juin 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 10 juin 2024

Probabilités sur un univers fini

1. Univers Ω des résultats observables, fini. Événements (comme Ω est fini, toute partie est un événement). Opérations sur les événements.
2. Système complet d'événements.
3. Probabilité sur un univers fini. Donner une probabilité revient à donner une distribution de probabilités (i.e. une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs ou nuls dont la somme vaut 1).
4. Propriétés usuelles, notamment formule du crible pour deux événements.
5. Cas de l'équiprobabilité : probabilité uniforme sur Ω et conséquence : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.
6. Probabilité conditionnelle : définition, propriétés usuelles.
7. Formule des probabilités composées.
8. Formule des probabilités totales. Version « avec intersection » et version « avec probabilités conditionnelles ». Par convention, pour cette deuxième version, on s'autorise à écrire le produit $P(A)P_A(B)$ même si $P(A) = 0$, et dans ce cas ce produit vaut 0.
9. Formule de Bayes.
10. Indépendance de deux événements. Si A et B sont indépendants, alors[1] A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
11. Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements. Résultat similaire sur la possibilité de passer au complémentaire.
12. Variables aléatoires (comme Ω est fini et que toute partie de Ω est un événement, toute fonction $X : \Omega \longrightarrow E$ est une variable aléatoire). Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.
13. Loi de probabilité d'une variable aléatoire ; notation P_X pour la probabilité induite par $X : \Omega \longrightarrow E$ sur E. La probabilité P_X est caractérisée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in E}$.
14. Dire que X et Y ont même loi, c'est trouver un ensemble commun E contenant les valeurs de X et celles de Y et dire que $P_X = P_Y$ sur E. On note alors $X \sim Y$.
15. Fonction d'une variable aléatoire. Expression de la loi de $f(X)$ à l'aide de la loi de X.
16. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
17. Lois usuelles
    (a) Loi uniforme sur un ensemble fini non vide E. Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
    (b) Loi de Bernoulli de paramètre p. On remarque que si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\mathbf{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$.
    (c) Loi binomiale de paramètres n et p. Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
18. Si S est une variable qui compte le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre de succès p, alors[1] $S \sim \mathscr{B}(n,p)$.
19. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire.
20. Couples de variables aléatoires
    (a) Loi conjointe. Lois marginales.
    (b) Méthode pour trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe, avec la formule des probabilités totales.
21. Généralisation : vecteur aléatoire, loi conjointe, lois marginales.
22. Indépendance de deux variables aléatoires finies. Indépendance mutuelle d'une suite finie de variables aléatoires finies. Caractérisation par les probabilités des événements élémentaires.
23. Reformulation du résultat sur les lois binomiales : une somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
24. Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont. Lemme des coalitions.
25. Espérance d'une variable aléatoire finie : $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$.

1. Résultat démontré en cours.

26. Formule[1] : $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$.
27. Espérance d'une constante, espérance d'une variable de Bernoulli[1], espérance d'une variable binomiale[1].
28. Positivité de l'espérance[1], croissance de l'espérance[1], inégalité triangulaire[1] $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(|X|)$.
29. Théorème de transfert[1].
30. Conséquences : $\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X) + b$ quand a et b sont des constantes, calcul de $\mathbf{E}(X^2)$, calcul de $\mathbf{E}(XY)$.
31. On calcule en exercice $\mathbf{E}(X)$ quand $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ on en déduit par translation $\mathbf{E}(X)$ quand $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.
32. Linéarité de l'espérance.
33. Espérance d'un produit de variables indépendantes.
34. Variance d'une variable aléatoire finie.
35. Formule de Koenig-Huygens[1].
36. Relation $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$ quand a et b sont des constantes[1].
37. On calcule en exercice $\mathbf{V}(X)$ quand $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ on en déduit par translation $\mathbf{V}(X)$ quand $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.
38. Variable centrée, variable centrée-réduite.
39. Variable centrée réduite $X^* = \dfrac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ associée à une variable de variance non nulle.
40. Variance d'une constante. Variance d'une variable de Bernoulli[1]. Variance d'une variable binomiale[1].
41. Corrélation entre deux variables finies
    (a) Covariance d'un couple de variables.
    (b) Formule de Koenig-Huygens pour le calcul de $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
    (c) Caractère bilinéaire, symétrique et positif de Cov.
    (d) Variance d'une somme de deux variables aléatoires, ou d'une somme de plus de deux variables.
    (e) Variance d'une somme de variables indépendantes.
42. Inégalité de Markov[1].
43. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev[1].