Lycée Honoré de Balzac — Juin 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 17 juin 2024

Matrices et applications linéaires

1. Matrice d'un vecteur dans une base $\mathcal{B}$; isomorphisme $x \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Matrice d'une famille de vecteurs.
2. Matrice d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ dans des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$.
3. Matrice d'une homothétie quand la base de départ est la même que la base d'arrivée[1].
4. Isomorphisme $u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$. On en déduit que $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
5. Relation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ quand $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
6. Corollaire : relation similaire pour une famille de vecteurs.
7. Lien entre matrice d'une composée et produit matriciel.
8. Cas d'un isomorphisme. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on a l'équivalence[1] : u est un isomorphisme ssi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible et, dans ce cas, $(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})$.
9. Cas particulier des automorphismes, avec une base de départ égale à la base d'arrivée.
10. Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
11. Propriété[1] : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$. Conséquence : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
12. Formule de changement de base pour un vecteur[1].
13. Formules de changement de base, au départ et/ou à l'arrivée, pour une application linéaire (à savoir retrouver rapidement).
14. Cas particulier d'un changement de base pour un endomorphisme, avec même base au départ et à l'arrivée (à donner sans hésiter).
15. Matrices semblables. Définition ; propriétés élémentaires ; interprétation comme relation de changement de base.
16. Application linéaire $X \longmapsto AX$ canoniquement associée à une matrice A.
17. Image d'une matrice. Définition et description comme espace engendré par les colonnes de la matrice.
18. Noyau d'une matrice. Définition ; les vecteurs du noyau décrivent les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. En particulier, le noyau est réduit à l'espace nul ssi les colonnes forment une famille libre.
19. Rang d'une matrice.
20. Théorème du rang. On en déduit un moyen de calcul du rang, par résolution d'un système linéaire pour trouver une base du noyau.
21. Le rang de la matrice associée à une famille de vecteurs, dans une base, est égal au rang de cette famille de vecteurs. Le rang de la matrice d'une application linéaire dans des bases est égal au rang de cette application linéaire.
22. Récapitulatif sur toutes les caractérisations équivalentes des matrices inversibles (invisibilité à droite/à gauche, noyau, image, ...).
23. Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas le noyau, et ne modifient donc pas le rang.
24. Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne modifient pas l'image, et ne modifient donc pas le rang.
25. Conséquence : calcul pratique du rang par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.
26. Théorème admis : $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$.
27. Rang d'un système linéaire homogène ; dimension de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ; compatibilité d'un système linéaire non homogène ; système de Cramer.

1. Résultat démontré en cours.