Lycée Honoré de Balzac — Novembre 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 11 novembre 2024

Nombres complexes. Calculs de primitives

Nombres complexes

1. Définition des nombres complexes donnés par partie réelle et partie imaginaire. Somme, produit. Énoncé de formules déjà vues sur les nombres réels : somme de termes d'une suite géométrique ; factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ $(a, b \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}^*)$; formule du binôme de Newton.
2. Conjugué d'un nombre complexe ; propriétés usuelles[1] : conjugué, d'une somme, d'un produit, de l'inverse, caractérisation des réels, des imaginaires purs, formules : $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}}$.
3. Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.
4. Propriétés[1] :
   (a) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.
   (b) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = |\overline{z}|$.
   (c) $\forall z \in \mathbb{C},\ |-z| = |z|$.
   (d) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\overline{z}$.
   (e) Le module prolonge la valeur absolue déjà définie sur $\mathbb{R}$.
   (f) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |x| = x$, donc : $\forall z \in \mathbb{C},\ \big||z|\big| = |z|$.
   (g) $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$.
5. Module d'un produit[1] ou d'un quotient.
6. Inégalité triangulaire et cas d'égalité[1].
7. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notation $e^{\mathbf{i}\theta}$.
8. Formules d'Euler[1].
9. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathbf{i}\theta} e^{\mathbf{i}\theta'}$.
10. Formule de Moivre[1].
11. Savoir-faire : linéarisation d'expressions trigonométriques.
12. Savoir-faire : usage de l'angle moitié pour transformer l'expression d'une somme de nombres complexes de module 1.
13. Forme trigonométrique d'un nombre complexe : $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
14. Arguments d'un nombre complexe non nul z ; argument principal (dans $]-\pi, \pi]$) noté $\arg(z)$.
15. Propriétés[1] :
    (a) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ \ [2\pi]$;
    (b) Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ \ [2\pi]$;
    (c) Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ \ [2\pi]$;
    (d) Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ \ [2\pi]$;
16. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument modulo 2π.
17. Savoir-faire : transformer un expression de la forme $a\cos(t) + b\sin(t)$, avec $a, b, t \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, en une expression de la forme $r\cos(t - \varphi)$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On a $a + \mathbf{i}b = re^{\mathbf{i}\varphi}$.
18. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
    (a) Résolution[1] de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
    (b) En notant $\omega = e^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}$, propriétés[1] :
       i. on a : $\omega^n = 1$.
       ii. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$.
       iii. Si $n \geqslant 2$, on a : $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$, autrement dit : $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$.

1. Résultat démontré en cours.

19. (a) Méthode pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe.
    (b) Résolution des équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes.
    (c) Relations coefficients-racines [1].
20. Exponentielle complexe
    (a) Définition
    (b) Propriétés [1]
        i. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\mathrm{Im}(z)$ est un argument de $\exp(z)$.
        ii. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.
        iii. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
        iv. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z - z' = 2i\pi k$.
21. (a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes. Une telle fonction est dérivable si ses parties réelle et imaginaire le sont. Les formules pour la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, restent valables (démontré en cours pour le produit ; le reste est laissé en exercice).
    (b) Dérivabilité et dérivée [1] de $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$, où $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur un intervalle I.
22. Nombres complexes et géométrie plane
    (a) Affixe d'un vecteur
    (b) Interprétation géométrique des transformations $z \longmapsto z + z_0$, $z \longmapsto ze^{\mathbf{i}\theta_0}$, où $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés.
    (c) Si A, B, C D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D :
        — le réel $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$;
        — les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ssi $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$ ssi $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
        — les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ssi l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π ssi $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ssi $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbf{i}\mathbb{R}$.

Calculs de primitives

On considère des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Primitive d'une fonction. Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors [1] l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $F + c$, où $c \in \mathbb{K}$.
2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction admettant une primitive, si $a \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(a) = \alpha$.
3. Liste de primitives usuelles.
4. Propriétés pour l'instant admises de l'intégrale
    (a) Définition intuitive comme l'aire (algébrique) sous la courbe de la fonction intégrée
    (b) Linéarité de l'intégrale
    (c) Relation de Chasles
    (d) Positivité de l'intégrale. Cas d'une fonction continue et positive d'intégrale nulle.
    (e) Croissance de l'intégrale
    (f) Inégalité triangulaire pour les intégrales (démontré dans le cas d'une fonction à valeurs réelles).
5. Théorème fondamental de l'intégration. Conséquence : une fonction continue sur I admet des primitives sur I.
6. Intégration par parties [1]
7. Changement de variable [1]
8. Méthode pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$.
9. Méthode pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.